Cálculo Diferencial en Varias Variables

MORALES-ROSADO, Yuliana Esmeralda

ECORFAN®

ECORFAN-México

Autores
MORALES-ROSADO, Yuliana Esmeralda. MsC

Editor en Jefe
VARGAS-DELGADO, Oscar. PhD

Directora Ejecutiva
RAMOS-ESCAMILLA, María. PhD

Director Editorial
PERALTA-CASTRO, Enrique. MsC

Diseñador Web
ESCAMILLA-BOUCHAN, Imelda. PhD

Diagramador Web
LUNA-SOTO, Vladimir. PhD

Asistente Editorial
SORIANO-VELASCO, Jesús. BsC

Filóloga
RAMOS-ARANCIBIA, Alejandra. BsC

Cálculo Diferencial en Varias Variables

Primera Edición
ISBN: 978-607-8948-03-1
Sello Editorial ECORFAN: 607-8948
Número de Control B: 2023-06
Clasificación B (2023): 280923-0006

Books

Definición de Books

Objetivos Científicos

Apoyar a la Comunidad Científica Internacional en su producción escrita de Ciencia, Tecnología en Innovación en las Áreas de investigación CONAHCYT y PRODEP.

ECORFAN-Mexico S.C es una Empresa Científica y Tecnológica en aporte a la formación del Recurso Humano enfocado a la continuidad en el análisis crítico de Investigación Internacional y está adscrita al RENIECYT de CONAHCYT con número 1702902, su compromiso es difundir las investigaciones y aportaciones de la Comunidad Científica Internacional, de instituciones académicas, organismos y entidades de los sectores público y privado y contribuir a la vinculación de los investigadores que realizan actividades científicas, desarrollos tecnológicos y de formación de recursos humanos especializados con los gobiernos, empresas y organizaciones sociales.

Alentar la interlocución de la Comunidad Científica Internacional con otros centros de estudio de México y del exterior y promover una amplia incorporación de académicos, especialistas e investigadores a la publicación Seriada en Nichos de Ciencia de Universidades Autónomas - Universidades Públicas Estatales - IES Federales - Universidades Politécnicas - Universidades Tecnológicas - Institutos Tecnológicos Federales - Escuelas Normales - Institutos Tecnológicos Descentralizados - Universidades Interculturales - Consejos de CyT - Centros de Investigación CONAHCYT.

Alcances, Cobertura y Audiencia

Books es un Producto editado por ECORFAN-Mexico S.C en su Holding con repositorio en México, es una publicación científica arbitrada e indizada. Admite una amplia gama de contenidos que son evaluados por pares académicos por el método de Doble-Ciego, en torno a temas relacionados con la teoría y práctica de las Área de investigación CONAHCYT y PRODEP respectivamente con enfoques y perspectivas diversos, que contribuyan a la difusión del desarrollo de la Ciencia la Tecnología e Innovación que permitan las argumentaciones relacionadas con la toma de decisiones e incidir en la formulación de las políticas internacionales en el Campo de las Ciencias. El horizonte editorial de ECORFAN-Mexico® se extiende más allá de la academia e integra otros segmentos de investigación y análisis ajenos a ese ámbito, siempre y cuando cumplan con los requisitos de rigor argumentativo y científico, además de abordar temas de interés general y actual de la Sociedad Científica Internacional.

Comité Arbitral

Cesión de Derechos

El envío de una Obra Científica a ECORFAN Books emana el compromiso del autor de no someterlo de manera simultánea a la consideración de otras publicaciones científicas para ello deberá complementar el Formato de Originalidad para su Obra Científica.

Los autores firman el Formato de Autorización para que su Obra Científica se difunda por los medios que ECORFAN-México, S.C. en su Holding México considere pertinentes para divulgación y difusión de su Obra Científica cediendo sus Derechos de Obra Científica.

Declaración de Autoría

Indicar el Nombre de 1 Autor y 3 Coautores como máximo en la participación de la Obra Científica y señalar en extenso la Afiliación Institucional indicando la Dependencia.

Identificar el Nombre de 1 Autor y 3 Coautores como máximo con el Número de CVU Becario-PNPC o SNI-CONAHCYT- Indicando el Nivel de Investigador y su Perfil de Google Scholar para verificar su nivel de Citación e índice H.

Identificar el Nombre de 1 Autor y 3 Coautores como máximo en los Perfiles de Ciencia y Tecnología ampliamente aceptados por la Comunidad Científica Internacional ORC ID - Researcher ID Thomson - arXiv Author ID - PubMed Author ID - Open ID respectivamente

Indicar el contacto para correspondencia al Autor (Correo y Teléfono) e indicar al Investigador que contribuye como primer Autor de la Obra Científica.

Detección de Plagio

Todas las Obras Científicas serán testeadas por el software de plagio PLAGSCAN si se detecta un nivel de plagio Positivo no se mandará a arbitraje y se rescindirá de la recepción de la Obra Científica notificando a los Autores responsables, reivindicando que el plagio académico está tipificado como delito en el Código Penal.

Proceso de Arbitraje

Todas las Obras Científicas se evaluarán por pares académicos por el método de Doble Ciego, el arbitraje Aprobatorio es un requisito para que el Consejo Editorial tome una decisión final que será inapelable en todos los casos. MARVID® es una Marca de derivada de ECORFAN® especializada en proveer a los expertos evaluadores todos ellos con grado de Doctorado y distinción de Investigadores Internacionales en los respectivos Consejos de Ciencia y Tecnología el homologo de CONAHCYT para los capítulos de America-Europa-Asia-Africa y Oceania. La identificación de la autoría deberá aparecer únicamente en una primera página eliminable, con el objeto de asegurar que el proceso de Arbitraje sea anónimo y cubra las siguientes etapas: Identificación del ECORFAN Books con su tasa de ocupamiento autoral - Identificación del Autores y Coautores- Detección de Plagio PLAGSCAN - Revisión de Formatos de Autorización y Originalidad-Asignación al Consejo Editorial- Asignación del par de Árbitros Expertos-Notificación de Dictamen-Declaratoria de Observaciones al Autor-Cotejo de la Obra Científica Modificado para Edición-Publicación.

Cálculo Diferencial en Varias Variables

Differential Calculus in Several Variables

MORALES-ROSADO, Yuliana Esmeralda

ID 1[er] Autor: *Yuliana Esmeralda, Morales-Rosado* / **ORC ID:** 0009-0005-6145-5572

DOI: 10.35429/B.2023.6.1.262

Cálculo Diferencial en Varias Variables

El Book ofrecerá contribuciones seleccionadas de investigadores que contribuyan a la actividad de difusión científica para su área de investigación en la función de la Universidad ante los retos de la Sociedad del Conocimiento. Además de tener una evaluación total, en las manos de los directores se colabora con calidad y puntualidad en sus capítulos, cada contribución individual fue arbitrada a estándares internacionales (RESEARCH GATE, MENDELEY, GOOGLE SCHOLAR y REDIB), el Book propone así a la comunidad académica, los informes recientes sobre los nuevos progresos en las áreas más interesantes y prometedoras de investigación en la función de la Universidad ante los retos de la Sociedad del Conocimiento.

Contenido

Resumen

La presente obra representa un esfuerzo por explicar de manera exhaustiva temas seleccionados de un curso de Cálculo Diferencial en Varias Variables que son, a grandes rasgos, las funciones de varias variables, límites y continuidad, derivadas parciales y diferenciabilidad y derivadas de orden superior, a través de ejemplos resueltos minuciosamente y con el acompañamiento de los conceptos preliminares indispensables para una mejor comprensión de los temas mencionados.

Funciones de varias variables, Límites, Continuidad, Derivadas parciales

Abstract

This work represents an effort to exhaustively explain selected topics from a Differential Calculus in Several Variables course, which are, broadly speaking, the functions of several variables, limits and continuity, partial derivatives and differentiability and higher order derivatives, to through examples resolved in detail and accompanied by preliminary concepts essential for a better understanding of the above topics.

Functions of several variables, Limits, Continuity, Partial derivatives

Prefacio

En el proceso de enseñanza del cálculo diferencial en varias variables, uno de los principales retos académicos a los que se enfrenta un docente es que el estudiante no posea una base sólida de cálculo diferencial en una variable y de otras disciplinas que son el requisito previo para lograr un mejor entendimiento del cálculo.

Con la finalidad de mitigar esta problemática, el presente libro ha sido diseñado de modo que el lector disponga de ejemplos resueltos y explicados a detalle, sin saltarse pasos, así como de los conceptos y técnicas de cálculo de una variable, álgebra y geometría analítica sobre los que se sustentan la teoría y procedimientos de resolución de los ejemplos mostrados y ejercicios propuestos, los cuales son presentados de manera natural en el desarrollo de los temas; es decir, los elementos básicos que constituyen el antecedente de los contenidos de este libro se van incorporando antes de la definición que lo requiera, o bien, durante la explicación de los ejemplos resueltos, con la intención de llevar de la mano al estudiante en su proceso de aprender los temas que forman parte de este libro de texto.

Por lo antes mencionado, esta obra ha sido pensada como una herramienta de apoyo en los cursos de Cálculo Multivariable dirigidos a estudiantes de ingeniería, cumpliendo así con la línea de investigación de Ingeniería Educativa, perteneciente al Doctorado en Ingeniería de la Universidad Martí.

Prólogo

La presente obra está conformada de cuatro capítulos donde se desarrollan, a través de ejemplos explicados de manera exhaustiva, los elementos básicos de la teoría del cálculo diferencial en varias variables, iniciando con las funciones y sus gráficas, para posteriormente revisar los métodos para calcular límites y derivadas parciales, así como los criterios que permiten determinar cuándo una función es continua o diferenciable, hasta terminar con el análisis y resolución de problemas de optimización, basados en la teoría de máximos y mínimos.

Si bien es cierto que tiene como antecedente temas de álgebra lineal, cálculo de una variable y geometría analítica, aquí se proporcionan de manera breve y oportuna los conceptos que son indispensables para un mejor entendimiento de los saberes que competen a este libro.

En el *Capítulo 1. Funciones de Varias Variables* se definen y caracterizan a las funciones, tanto de valores reales como de valores vectoriales, enfatizando en su dominio y su gráfica; también se contemplan los tipos de funciones y la operación composición. En particular, en la sección 1.1, se definen los conjuntos $\mathbb{R}^n$ que son fundamentales para entender cómo está estructurada una función. En la sección 1.6, se resumen las ecuaciones y gráficas de las cónicas (sección 1.6.2) y de las superficies cuádricas (sección 1.6.3) como requisito necesario para representar a las gráficas de las funciones reales de dos variables.

En el *Capítulo 2. Límites y Continuidad* se establece el concepto de límite de manera intuitiva, así como los principales métodos para resolver límites de funciones en varias variables, centrando la atención en las funciones reales de dos variables, para las que se incluyen los límites direccionales y el método de coordenadas polares. También se define la continuidad de una función en un punto y los tipos de discontinuidad y se enuncian las propiedades de las funciones continuas.

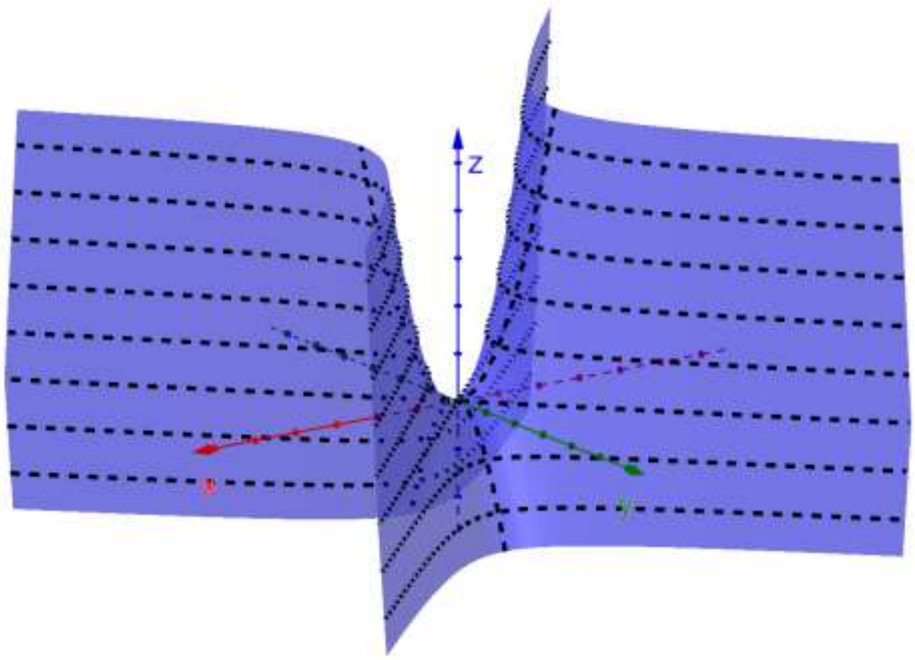
El *Capítulo 3. Derivadas Parciales y Diferenciabilidad* consta de cuatro secciones donde, a grandes rasgos, se estudian las derivadas parciales, la matriz Jacobiana y diferenciabilidad, la regla de la cadena, el vector gradiente y la derivada direccional. La sección 3.1 sobre derivadas parciales considera la interpretación geométrica y la interpretación física de las derivadas parciales de funciones reales de dos variables; en la sección 3.2, sobre matriz Jacobiana y diferenciabilidad, además de detallar ambas nociones, se establece la relación entre la diferenciabilidad y la continuidad de una función; en la sección 3.3, sobre reglas de diferenciación, se profundiza en la regla de la cadena y sus aplicaciones; mientras que, en la sección 3.4 se emplea el gradiente de una función para caracterizar a la derivada direccional y definir una ecuación para el plano tangente a una superficie diferenciable. Más aún, en las secciones 3.2 y 3.3, se incorporan la definición de matriz y sus operaciones básicas como precedente de la matriz Jacobiana y las reglas de diferenciación. En la sección 3.4 se proporcionan conceptos básicos de la teoría de vectores para favorecer la comprensión del vector gradiente y de la derivada direccional.

El *Capítulo 4. Derivadas de Orden Superior*, además de ilustrar con ejemplos el proceso para encontrar las derivadas de orden superior, contiene la teoría de máximos y mínimos de una función real de dos variables, destacando el criterio de la segunda derivada, el método de los multiplicadores de Lagrange y sus aplicaciones (problemas de optimización).

Así mismo, al final de cada capítulo se proponen los ejercicios correspondientes a los temas más relevantes de éste, cuyas respuestas se encuentran disponibles en el Apéndice C. Además, todas las gráficas mostradas en este libro fueron generadas con la aplicación de escritorio de la versión 6.0 de la calculadora GeoGebra Clásico y GeoGebra 3D, que forman parte de la *Suite Calculadora GeoGebra*; más aún, en el Apéndice B, se describe cómo fueron utilizados ambos graficadores. También se cuenta con el Apéndice A, que contiene fórmulas básicas de álgebra y trigonometría, donde algunas de éstas fueron aplicadas durante la resolución de los ejemplos.

Por último, se incluyen las referencias de donde fue inspirada la teoría de esta obra y surgieron algunos de los ejemplos resueltos y los ejercicios propuestos, mismos que fueron adaptados y desarrollados de manera diferente, con una explicación más detallada que los ejercicios originales.

Capítulo 1. Funciones de Varias Variables



1.1 Introducción

Desde la educación básica en la que se aprende a contar y a realizar las operaciones aritméticas, hasta los niveles medio y superior donde se estudian asignaturas más avanzadas como álgebra, trigonometría y geometría analítica, juega un papel esencial el conjunto de los números reales. En particular, en el curso de cálculo, este conjunto es fundamental para definir y caracterizar las funciones que dependen de una o más variables, que son el principal objeto de estudio de este libro.

El conjunto de todos los números reales, representado por $\mathbb{R}$, está constituido por los números racionales y los números irracionales. Los números racionales son aquellos que pueden expresarse como un cociente o división de enteros $\frac{a}{b}$, con $b \neq 0$, por ejemplo, $-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{16}{55}, \frac{7}{10}, -\frac{21}{13}$, que tienen a su vez una representación decimal finita o infinita periódica, es decir:

$-\frac{1}{3} = -0.3333\ldots, \frac{3}{4} = 0.75, -\frac{1}{2} = -0.5, \frac{16}{55} = 0.290909090\ldots, \frac{7}{10} = 0.7,$

$-\frac{21}{13} = -1.6153846153846153846\ldots$

Además, dentro del conjunto de los números racionales se encuentran incluidos todos los números enteros. Por otro lado, los números irracionales no se pueden expresar como una división de enteros y tienen una representación decimal infinita no periódica, por ejemplo:

$\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots, \pi = 3.14159265359\ldots, e = 2.71828182846\ldots,$

$-\sqrt{3} = -1.73205080757\ldots, \frac{\pi}{3} = 1.0471975512\ldots, -e^2 = -7.38905609893\ldots$

Es importante destacar que, expresiones tales como $\frac{5}{0}, \frac{0}{0}, \sqrt{-1}, \sqrt{-2}$ no son números reales. Más ejemplos de números reales son:

$-9,\ 0,\ 117,\ \frac{3}{7},\ \frac{11}{4},\ 1.5,\ -6.85,\ \pi^2,\ \sqrt{18},\ -\sqrt{5},\ \frac{e}{5},\ sen(20),\ ln(56).$

Mientras que, no son números reales:

$\sqrt{-3},\ \sqrt{-7},\ \frac{8}{0},\ \frac{0}{0},\ ln(0),\ ln(-3),\ \infty,\ -\infty.$

Todos los números reales pueden representarse geométricamente en la recta numérica, asociando a cada número real un punto sobre la recta, como se muestra en la figura 1.1.

Figura 1.1 Representación geométrica de algunos números reales

Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico

Donde el punto A está asociado al número 3, el punto B está asociado a $-\frac{1}{2}$, el punto C está asociado a $\sqrt{2}$, el punto D le corresponde a $-\pi$, el punto E es a $\frac{1}{3}$ y F a -1.65. (Swokowski y Cole, 2009).

Los principales subconjuntos de números reales son los intervalos, los cuales son acotados cuando los números reales que los conforman se encuentran comprendidos entre dos números reales dados, digamos a y b, con $a < b$ (a menor que b), conocidos como extremos del intervalo; mientras que los intervalos no acotados son aquellos donde sólo uno de sus extremos es un número real, esto es, sus elementos son números reales mayores que un número real dado, digamos a, o menores que un número real dado, digamos b. De este modo, considerando a, b números reales tales que $a < b$, se definen a continuación los diferentes tipos de intervalos, acotados y no acotados, junto con su notación de conjunto y su representación geométrica.

Intervalos acotados

Intervalo abierto (a, b): Es el conjunto de los números reales mayores que a y menores que b, de modo que a y b no están dentro del intervalo. En notación de conjunto se escribe $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$. El conjunto anterior se lee: "El conjunto de los x que pertenecen a $\mathbb{R}$ tal que a es menor que x y x es menor que b".

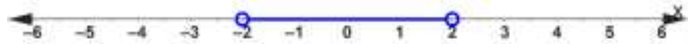
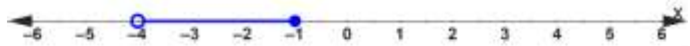
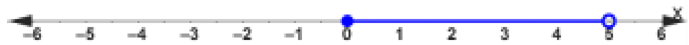
Intervalo cerrado $[a, b]$: Es el conjunto de los números reales mayores o iguales que a y menores o iguales que b, de modo que a y b sí están dentro del intervalo. En notación de conjunto se escribe $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$. El conjunto anterior se lee: "El conjunto de los x que pertenecen a $\mathbb{R}$ tal que a es menor o igual que x y x es menor o igual que b".

Intervalo semi abierto por la izquierda $(a, b]$: Es el conjunto de los números reales mayores que a y menores o iguales que b, de modo que a no está dentro del intervalo, pero b sí. En notación de conjunto se escribe $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$. El conjunto anterior se lee: "El conjunto de los x que pertenecen a $\mathbb{R}$ tal que a es menor que x y x es menor o igual que b".

Intervalo semi abierto por la derecha $[a, b)$: Es el conjunto de los números reales mayores o iguales que a y menores que b, de modo que a sí está dentro del intervalo, pero b no. En notación de conjunto se escribe $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$. El conjunto anterior se lee: "El conjunto de los x que pertenecen a $\mathbb{R}$ tal que a es menor o igual que x y x es menor que b".

Además, en cada uno de los intervalos acotados, a es el extremo izquierdo del intervalo y b es el extremo derecho de éste. Ver los ejemplos correspondientes en la tabla 1.1.

Tabla 1.1 Ejemplos de intervalos acotados

Intervalo	Notación de conjunto	Representación geométrica
$(-2{,}2)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$	
$[-5{,}3]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 3\}$	
$(-4,-1]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq -1\}$	
$[0{,}5)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 5\}$	

Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico

Intervalos no acotados

Análogamente, se definen en notación de conjunto los intervalos no acotados.

$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$ es el conjunto de todos los números reales mayores que a.

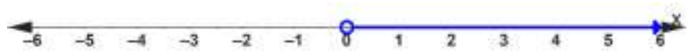
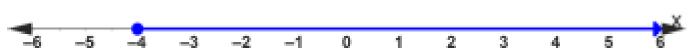
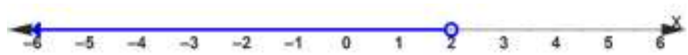
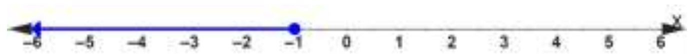
$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$ es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que a.

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$ es el conjunto de todos los números reales menores que b.

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}$ es el conjunto de todos los números reales menores o iguales que b.

Nótese que, cuando el extremo derecho del intervalo es ∞ o el extremo izquierdo es $-\infty$, dichos extremos no se encuentran dentro del intervalo por no ser números reales y, en consecuencia, en la notación de intervalo estos extremos se rodean siempre con un paréntesis. Además, el conjunto de todos los números reales también puede denotarse como el intervalo no acotado $(-\infty, \infty)$. Ver los ejemplos en la tabla 1.2.

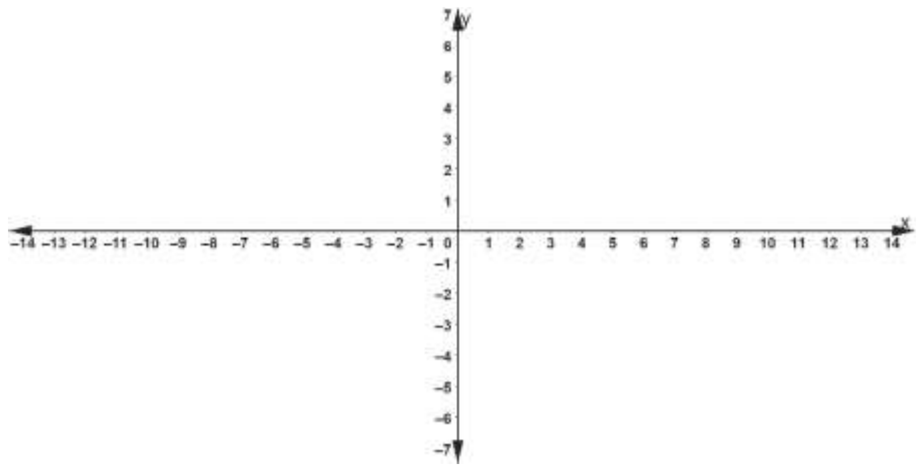
Tabla 1.2 Ejemplos de intervalos no acotados

Intervalo	Notación de conjunto	Representación geométrica
$(0, \infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$	
$[-4, \infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -4\}$	
$(-\infty, 2)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$	
$(-\infty, -1]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$	

Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico

Una vez que se ha definido el conjunto de números reales, $\mathbb{R}$, así como sus principales subconjuntos, los intervalos, los cuales se utilizan en el curso de Cálculo de una Variable para representar el dominio y el rango de una función real de una variable, se está en posición de definir conjuntos más generales a partir de $\mathbb{R}$, que se ocuparán más adelante para expresar el dominio y el rango de funciones de varias variables. Dichos conjuntos son de la forma $\mathbb{R}^n$, donde n es un número entero positivo (número natural), que se define como el conjunto de todas las n-adas ordenadas de números reales. En notación de conjunto se escribe $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$. En el caso particular en que $n = 2$, $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales, los cuales pueden representarse en el plano cartesiano. En notación de conjunto se expresa por $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$. Gráficamente el conjunto $\mathbb{R}^2$ queda representado por todo el plano cartesiano, como se muestra en la figura 1.2.

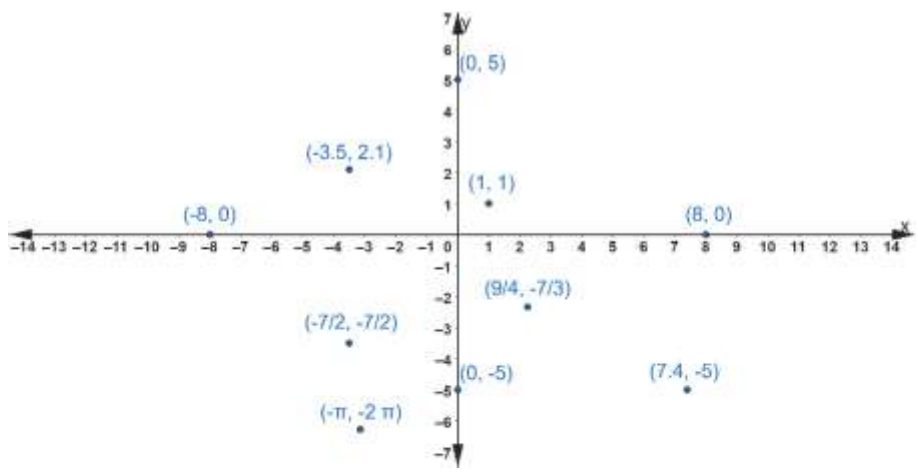
Figura 1.2 Representación del conjunto $\mathbb{R}^2$ (plano cartesiano)



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico

Algunos ejemplos de elementos de $\mathbb{R}^2$ (pares ordenados de coordenadas reales) son los siguientes: $(8,0), (1,1), (0,5), (-3.5,2.1), (-8,0), \left(-\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\right), (-\pi, -2\pi), (0, -5)$, pares ordenados que pueden asociarse con su respectivo punto ubicado en el plano cartesiano, como se muestra en la figura 1.3.

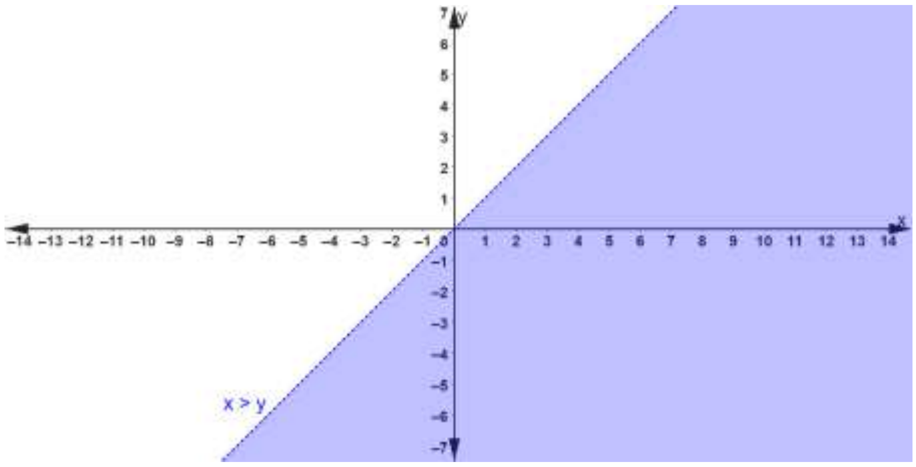
Figura 1.3 Ejemplos de elementos de $\mathbb{R}^2$ (pares ordenados)



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico

Además, cualquier conjunto de pares ordenados de coordenadas reales define un subconjunto de $\mathbb{R}^2$; por ejemplo, el conjunto de los pares ordenados (x, y) tales que $x > y$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y su notación de conjunto es $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > y\}$. Su representación geométrica se muestra en la figura 1.4.

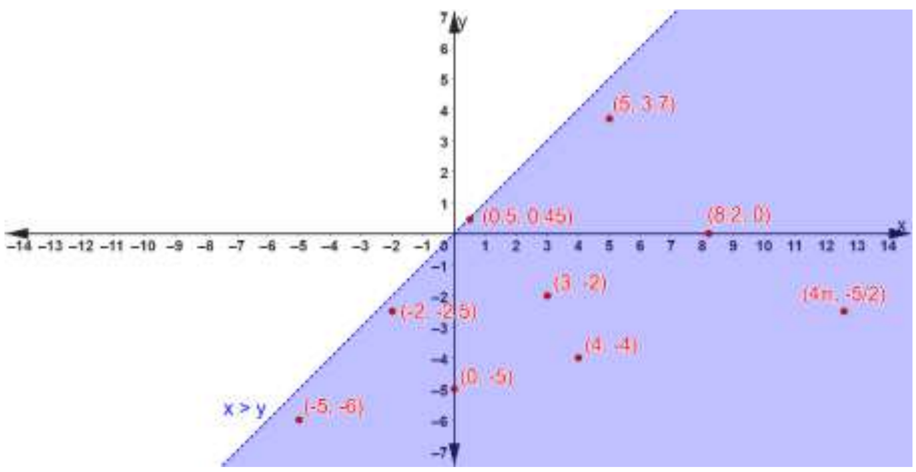
Figura 1.4 Representación gráfica del conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > y\}$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico

Donde la parte sombreada de azul es la porción del plano cartesiano que representa al conjunto en cuestión. Nótese que la línea punteada indica que se excluye la recta identidad $y = x$. Algunos elementos de dicho conjunto son los pares ordenados: $(0.5,0.45), (5,3.7), (-2,-2.5), (0,-5), (3,-2), (-5,-6), (4,-4), \left(4\pi, -\frac{5}{2}\right)$, donde la coordenada x cumple con ser mayor que la coordenada y. Ver la figura 1.5.

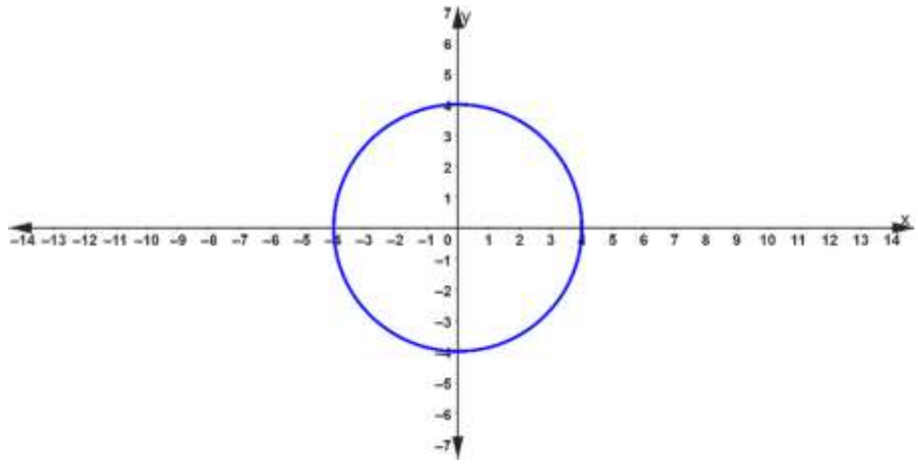
Figura 1.5 Ejemplos de elementos del conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > y\}$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico

Un segundo ejemplo de subconjunto de $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de los pares ordenados (x, y) tales que $x^2 + y^2 = 16$ y su notación de conjunto es $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 16\}$. Su representación geométrica se muestra en la figura 1.6.

Figura 1.6 Representación gráfica del conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 16\}$

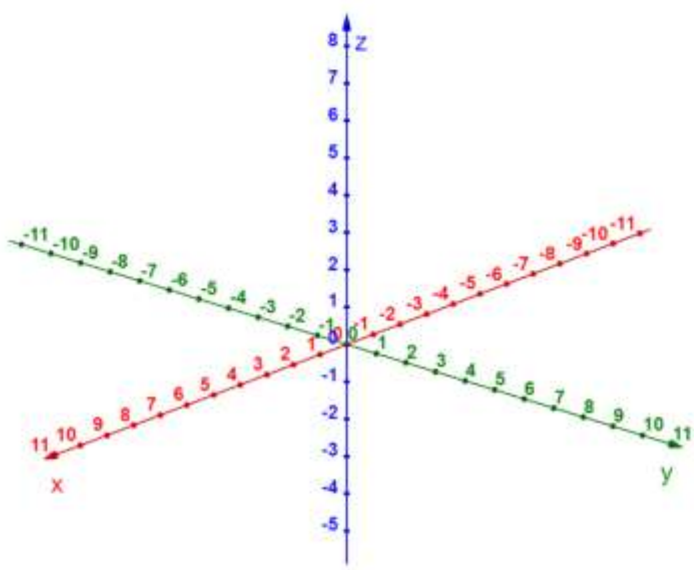


Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico

La circunferencia azul con centro en el origen $(0,0)$ y radio 4, es la curva que representa al conjunto en cuestión. Algunos elementos de dicho conjunto son los pares ordenados: $(4,0), (-4,0), (0,4), (0,-4), (3, \sqrt{7}), (-3, \sqrt{7}), (-\sqrt{7}, -3), (\sqrt{7}, -3)$.

En el caso en que $n = 3$, $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales, que pueden representarse en el espacio (sistema de coordenadas tridimensional). En notación de conjunto se escribe $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Gráficamente el conjunto $\mathbb{R}^3$ queda representado por todo el espacio o sistema de coordenadas tridimensional, como se muestra en la figura 1.7.

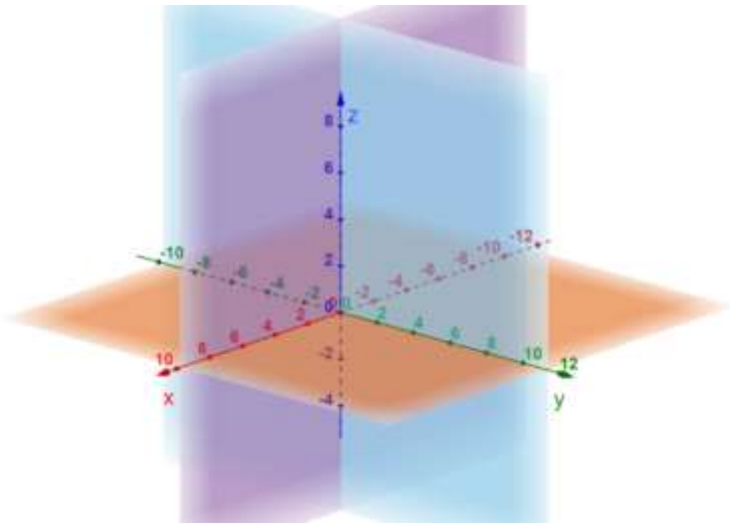
Figura 1.7 Representación del conjunto $\mathbb{R}^3$ (sistema de coordenadas tridimensional)



Fuente: Elaboración propia con GeoGebra 3D

Donde, el eje x es el de color rojo, el eje y es el de color verde y el eje z es el de color azul; este último tendrá siempre una orientación vertical, perpendicular a los otros dos ejes. Además, los ejes coordenados x y y forman el plano coordenado xy, cuya ecuación es $z = 0$; los ejes coordenados x y z forman el plano coordenado xz, de ecuación $y = 0$; los ejes coordenados y y z forman el plano coordenado yz, de ecuación $x = 0$. Ver la figura 1.8.

Figura 1.8 Representación del conjunto $\mathbb{R}^3$ (sistema de coordenadas tridimensional)

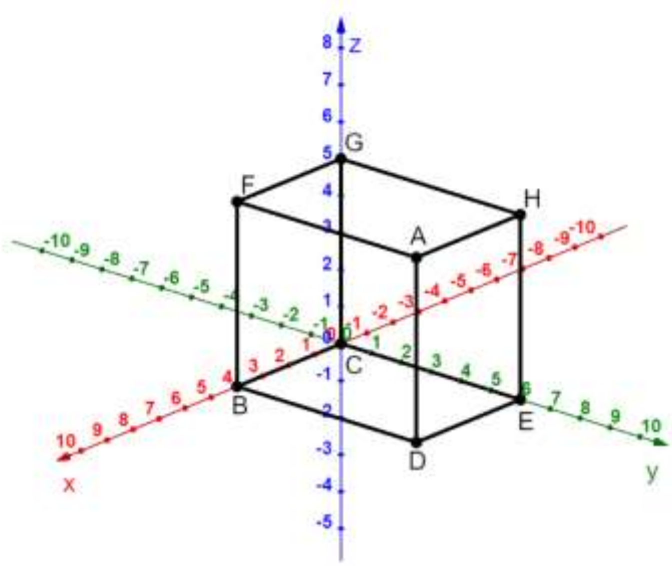


Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

El plano naranja representa el plano coordenado xy, de ecuación $z = 0$. Análogamente, el plano morado representa el plano coordenado xz, de ecuación $y = 0$; mientras que, el plano azul es el plano coordenado yz, de ecuación $x = 0$. Para recordar la ecuación de cada uno de los planos coordenados, nótese que ésta se construye igualando con 0 la variable que corresponde al eje que no forma al plano en cuestión.

Algunos ejemplos de elementos de $\mathbb{R}^3$ son las siguientes ternas ordenadas de coordenadas reales: $A = (4,6,5), B = (4,0,0), C = (0,0,0), D = (4,6,0), E = (0,6,0),\ F = (4,0,5), G = (0,0,5), H = (0,6,5)$, mismas que, en este caso, se corresponden con los vértices del paralelepípedo dado en la figura 1.9.

Figura 1.9 Ejemplos de elementos de $\mathbb{R}^3$ (ternas ordenadas)



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

Nótese que, el punto $C = (0,0,0)$ es el punto de intersección de los tres ejes coordenados, conocido como el origen de coordenadas o simplemente origen del sistema de coordenadas tridimensionales; el punto $B = (4,0,0)$ está sobre el eje x, $E = (0,6,0)$ está sobre el eje y, $G = (0,0,5)$ está sobre el eje z; el punto $D = (4,6,0)$ está sobre el plano xy, $F = (4,0,5)$ está sobre el plano xz, $H = (0,6,5)$ sobre el plano yz. Finalmente, el punto $A = (4,6,5)$ está ubicado en la región del espacio determinada por la parte positiva de los tres ejes coordenados, conocida como el primer octante.

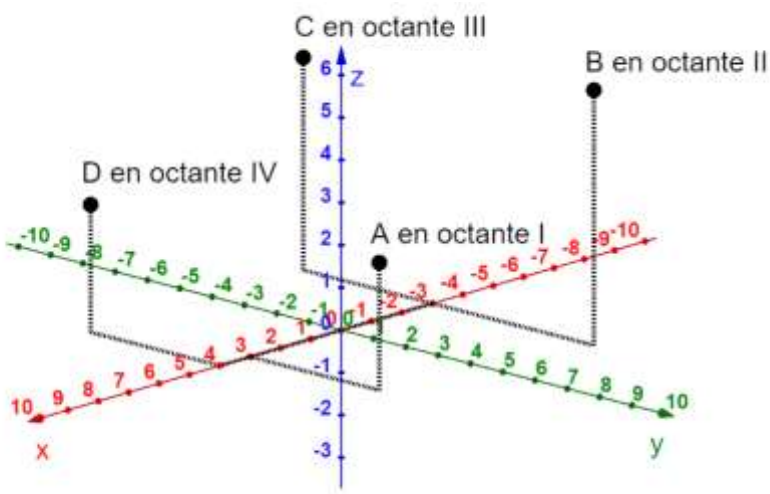
Así mismo, se pueden identificar otros siete octantes del siguiente modo: El segundo octante es la región del espacio determinada por la parte negativa del eje x y la parte positiva de los ejes y y z; el tercer octante está determinado por la parte negativa de los ejes x y y y la parte positiva del eje z; el cuarto octante, por la parte positiva de los ejes x y z y la parte negativa del eje y. Luego, el quinto octante es la región del espacio ubicada debajo del primer octante, el sexto octante es la región debajo del segundo octante, el séptimo octante está debajo del tercero y, el octavo octante, debajo del cuarto. A continuación, se presentan más ejemplos de ternas ordenadas representadas con su respectivo punto en el sistema de coordenadas tridimensional, donde cada punto pertenece a uno de los diferentes octantes.

$A = (3,4,3), B = (-3,5,6), C = (-3,-4,5), D = (4,-4,3), E = (3,4,-3),$

$F = (-5,2,-2), G = (-3,-5,-2), H = (4,-2,-3)$

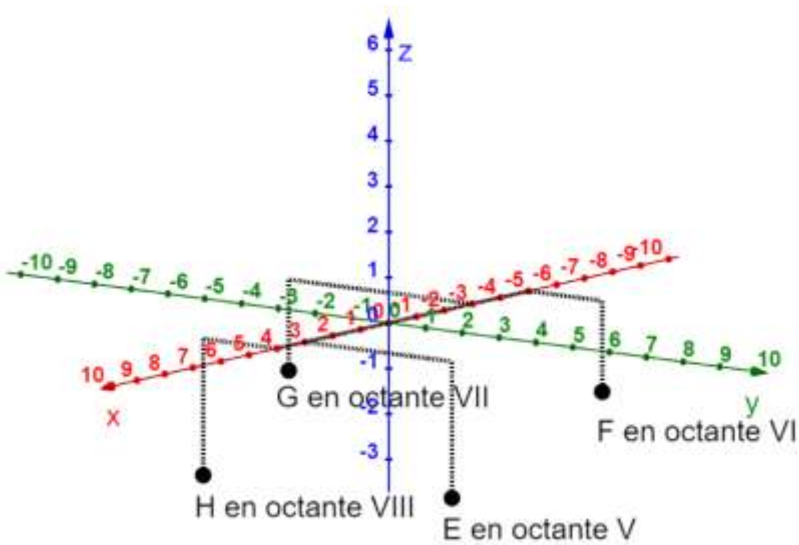
Específicamente, el punto A pertenece al octante I, B pertenece al octante II, C al octante III, D al octante IV, E al octante V, F al VI, G al VII y H al VIII. Ver la figura 1.10(a)-(c).

Figura 1.10 (a) Elementos de $\mathbb{R}^3$ ubicados en los octantes del I al IV



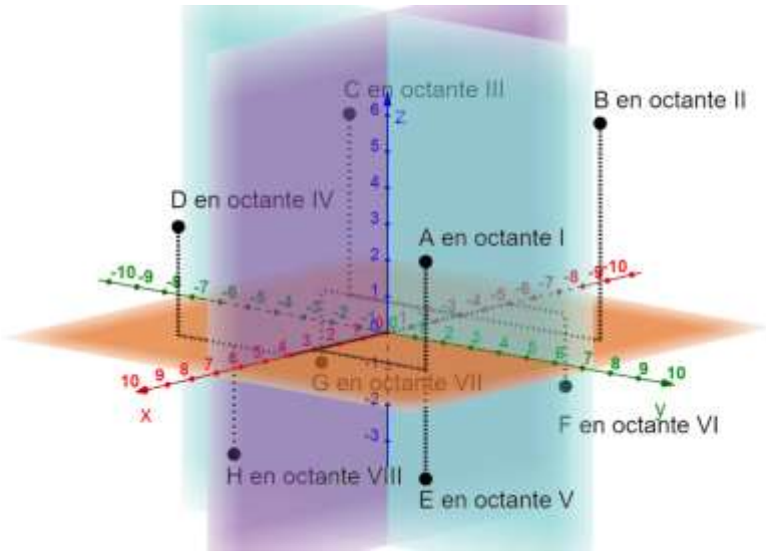
Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

Figura 1.10 (b) Elementos de $\mathbb{R}^3$ ubicados en los octantes del V al VIII



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

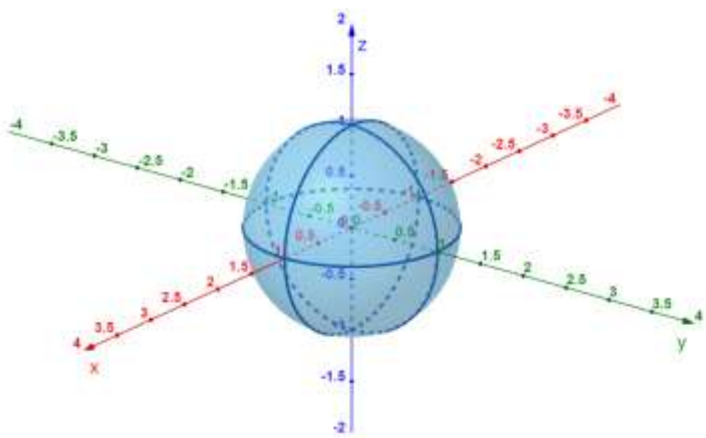
Figura 1.10 (c) Elementos de $\mathbb{R}^3$ ubicados en los diferentes octantes



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

Más aún, cualquier conjunto de ternas ordenadas de coordenadas reales define un subconjunto de $\mathbb{R}^3$; por ejemplo, el conjunto de las ternas ordenadas (x, y, z) tales que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ y su notación de conjunto es $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Su representación geométrica se muestra en la figura 1.11.

Figura 1.11 Representación gráfica del conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

La esfera azul con centro en el origen $(0,0,0)$ y radio 1, es la superficie que representa al conjunto en cuestión. Algunos elementos de dicho conjunto son las ternas ordenadas $(0,0,1), (1,0,0), (0,1,0), (0,-1,0), (-1,0,0), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Una vez definidos los conjuntos $\mathbb{R}^n$, se está en condiciones de establecer el concepto más importante del cálculo, que es el concepto de función.

1.2 Funciones de varias variables

Al calcular el área A de un rectángulo de base b y altura h, la fórmula dada por $A = bh$ representa una función donde el área depende de la base y la altura. De manera semejante, la velocidad v con que se desplaza un automóvil depende de la distancia d recorrida y el tiempo t empleado para recorrer dicha distancia, relación que se expresa por $v = d/t$. Así mismo, la presión P de un gas en un punto (x, y, z) del espacio tridimensional es una regla de correspondencia entre la presión y las tres coordenadas del punto, donde la presión P varía conforme cambian los valores que toman x, y y z. En los tres casos, las situaciones indicadas son ejemplos de funciones reales de varias variables.

En esta sección se estudia la definición más importante del cálculo, que es la definición de función, haciendo distinción entre funciones de una y varias variables, así como entre funciones de valores reales y funciones de valores vectoriales, lo cual se ilustra mediante ejemplos.

1.2.1. Definición de función

Sean $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ dos conjuntos, donde n y m son números enteros positivos $(n, m \geq 1)$. Se define una ***función*** f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, como una regla de correspondencia que asigna a cada elemento P de $\mathbb{R}^n$ un *único* elemento w de $\mathbb{R}^m$, tal que $w = f(P)$. De este modo, $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ para $P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, donde $x_1, x_2, \dots, x_n$ son las variables independientes y w es la "variable" dependiente de la función f. Si $n = 1$, entonces P es una variable, digamos por ejemplo x, en consecuencia $f(P) = f(x)$; si $n = 2$, entonces P es un par ordenado, digamos $P = (x, y)$, luego $f(P) = f(x, y)$; si $n = 3$, entonces P es una terna ordenada, digamos $P = (x, y, z)$, en consecuencia $f(P) = f(x, y, z)$. Análogamente, si $m = 1$, entonces w es un número real, dado por una expresión algebraica (donde se combinan constantes y variables mediante las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación) o por una expresión trascendente (que involucra funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas). Si $m = 2$, entonces w es un par ordenado o vector de dos componentes que están definidas mediante una función algebraica o trascendente; si $m = 3$, entonces w es una terna ordenada donde cada coordenada o componente está definida mediante una función algebraica o trascendente.

1.2.2 Funciones de la forma $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

En general, la función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una *función de una variable* si $n = 1$ y es una *función de varias variables* si $n > 1$. Además, se dice que es una *función que toma valores reales* si $m = 1$ y es una *función que toma valores vectoriales* si $m > 1$. Por lo tanto, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $n, m > 1$, es una función de varias variables con valores vectoriales y se denota por:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \big(f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)\big)$$

O bien, por:

$$f(P) = \big(f_1(P), f_2(P), \dots, f_m(P)\big),$$

donde $P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $f_1, f_2, \dots, f_m$ son las funciones componentes de f.

A continuación, se muestran ejemplos de funciones de la forma $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, donde n, m son números enteros positivos.

Tabla 1.3 Ejemplos de funciones de una variable

Función	De donde a donde va	Observación
$f(x) = x$	$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	f sólo depende de la variable x (x es la variable independiente)
$g(y) = (y, y^2)$	$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$	g sólo depende de la variable y (y es la variable independiente)
$h(r) = \left(\frac{1}{r}, cosr, e^r\right)$	$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$	h sólo depende de la variable r (r es la variable independiente)
$p(t) = \left(t^2 - 5t + 1, lnt, \sqrt{t}, t - 3\right)$	$p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$	p sólo depende de la variable t (t es la variable independiente)

Fuente: Elaboración Propia

Nótese que cada una de las funciones propuestas en la tabla 1.3 son evaluadas en elementos del conjunto $\mathbb{R}^n$, con $n = 1$, donde $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$; es decir, son evaluadas en números reales. Así, si se considera la función $h(r) = \left(\frac{1}{r}, cosr, e^r\right)$, que depende únicamente de la variable r, ésta se puede evaluar en un número real específico sustituyendo la variable por dicho valor, por ejemplo $h(2) = \left(\frac{1}{2}, cos2, e^2\right)$, es el valor que toma la función h en $r = 2$, donde cada una de las coordenadas, $\frac{1}{2}, cos2, e^2$, son números reales; sin embargo, para $r = 0$, $h(0)$ implicaría tener, en la primera coordenada, 0 en el denominador de una fracción, esto es, $\frac{1}{0}$, lo cual no representa un número real. De aquí que, se intuye que la función h NO debe ser evaluada en 0.

Tabla 1.4 Ejemplos de funciones de varias variables

Función	De donde a donde va	Observación
$f(x,y) = x + y$	$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	f depende de dos variables, x y y (x y y son las variables independientes)
$g(u,v) = (uv, u^2 - 3v)$	$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$	g depende de dos variables, u y v (u y v son las variables independientes)
$F(x,y,z) = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}$	$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$	F depende de tres variables, x, y y z (x, y y z son las variables independientes)
$h(r,s,t) = \left(\frac{1}{rs}, cosr^2 - t, e^{r+2s-3t}\right)$	$h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$	h depende de tres variables, r, s y t (r, s y t son las variables independientes)
$p(t,u) = \left(t^2 - 5tu + 2u, tlnu, \sqrt{ut}, u - 3t\right)$	$p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$	p depende de dos variables, t y u (t y u son las variables independientes)

Fuente: Elaboración Propia

Nótese que cada una de las funciones de la tabla 1.4 son evaluadas en elementos de $\mathbb{R}^n$, con $n > 1$; es decir, son evaluadas en n-adas ordenadas de números reales. Si se considera la función $F(x,y,z) = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}$ que depende de las variables x, y y z, ésta se evalúa en ternas ordenadas de números reales (x,y,z), esto es, en elementos de $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, evaluar la función F en $(0,0,0)$ significa reemplazar las variables por 0, llegando a que $F(0,0,0) = 4$. Por otro lado, la función F no toma un valor real cuando se evalúa en la terna $(5,0,0)$, puesto que $F(5,0,0) = \sqrt{16 - 25 - 0 - 0} = \sqrt{-9}$ NO es un número real.

Tabla 1.5 Ejemplos de funciones de valores reales

Función	De donde a donde va	Observación
$f(x) = x$	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	f toma valores reales
$g(u,v) = u^2 + v^2$	$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	g toma valores reales
$F(x,y,z) = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}$	$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$	F toma valores reales
$h(r,s,t,u) = cost - 3sr^2 + 2u$	$h: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$	h toma valores reales

Fuente: Elaboración Propia

Nótese que cada una de las funciones de la tabla 1.5 toma valores en el conjunto $\mathbb{R}^m$, con $m = 1$; esto es, toma valores reales, puesto que cada función está definida mediante una expresión algebraica o trascendente o mediante operaciones entre éstas.

Si se considera la función $h(r,s,t,u) = cost - 3sr^2 + 2u$, que depende de las variables r, s, t, u, ésta se evalúa en elementos de $\mathbb{R}^4$ de la forma (r,s,t,u), de modo que el valor que toma la función es un número real. Por ejemplo, evaluar la función h en el punto $(3,2,0,-1)$ significa sustituir $r = 3, s = 2, t = 0, u = -1$, es decir:

$h(3,2,0,-1) = cos0 - 3(2)(3)^2 + 2(-1) = 1 - 54 - 2 = -55$

que da como resultado un número real. Análogamente, se pueden evaluar las otras funciones de la tabla anterior y, en cada caso, se espera que la función tome valores reales. Por ejemplo: $f(7) = 7$ es un número real, $g(-1,3) = (-1)^2 + (3)^2 = 1 + 9 = 10$ es un número real y $F(2,-1,3) = \sqrt{16 - (2)^2 - (-1)^2 - (3)^2} = \sqrt{16 - 4 - 1 - 9} = \sqrt{2}$ es un número real.

Tabla 1.6 Ejemplos de funciones de valores vectoriales

Función	De donde a donde va	Observación
$f(y) = (y, y^2)$	$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$	f toma valores vectoriales
$g(u,v) = (uv, u^2 - 3v)$	$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$	g toma valores vectoriales
$F(t) = \left(\frac{1}{t}, cost, e^t\right)$	$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$	F toma valores vectoriales
$h(r,s,t) = \left(\frac{1}{rs}, cosr^2 - t, e^{r+2s-3t}\right)$	$h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$	h toma valores vectoriales
$p(t,u) = \left(t^2 - 5tu + 2u, tlnu, \sqrt{ut}\right)$	$p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$	p toma valores vectoriales

Fuente: Elaboración Propia

Nótese que cada una de las funciones de la tabla 1.6 toma valores en el conjunto $\mathbb{R}^m$, con $m > 1$; esto es, toma valores vectoriales, puesto que cada función está definida mediante una m-ada ordenada o vector de m componentes. Si se considera la función

$$p(t,u) = \left(t^2 - 5tu + 2u, tlnu, \sqrt{ut}\right)$$

que depende de las variables t, u, ésta se evalúa en elementos de $\mathbb{R}^2$ de la forma (t,u), de modo que la función toma valores en $\mathbb{R}^3$; es decir, la función p toma valores que ya NO son números reales sino vectores de tres coordenadas o componentes que, a su vez, son las funciones:

$$p_1(t,u) = t^2 - 5tu + 2u$$

$$p_2(t,u) = tlnu$$

$$p_3(t,u) = \sqrt{ut}$$

De este modo, evaluar la función p significa evaluar cada una de sus funciones componentes. Luego, en el par ordenado $(1,1)$ se tiene lo siguiente:

$$p(1,1) = \left((1)^2 - 5(1)(1) + 2(1), (1)ln(1), \sqrt{(1)(1)}\right) = (-2,0,1)$$

Donde $p(1,1) = (-2,0,1)$ es un elemento de $\mathbb{R}^3$ que corresponde al valor de la función en $(1,1)$. Se debe tener cuidado en cómo elegir los pares ordenados (t,u) para que todas las funciones componentes de p estén bien definidas, esto es, tomen valores reales. Por ejemplo, en el par ordenado $(0,0)$ las funciones componentes p_1 y p_3 sí toman valores reales (están definidas), de hecho, ambas toman el valor de 0; mientras que la función componente p_2 no toma un valor real, debido a que el logaritmo natural se indefine en 0. Se concluye que no es conveniente evaluar la función p en $(0,0)$.

Análogamente, evaluando las otras funciones de la tabla anterior en elementos adecuados, se llega a lo siguiente:

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ es un par ordenado o un vector de dos componentes reales.

$g(-1,3) = \big((-1)(3), (-1)^2 - 3(3)\big) = (-3, -8)$ es un par ordenado o un vector de dos componentes reales.

$F(\pi) = \left(\frac{1}{\pi}, cos\pi, e^{\pi}\right) = \left(\frac{1}{\pi}, -1, e^{\pi}\right)$ es una terna ordenada o un vector de tres componentes reales.

$h\left(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{(2)\left(\frac{1}{2}\right)}, cos(2)^2 - \frac{1}{3}, e^{2+2\left(\frac{1}{2}\right)-3\left(\frac{1}{3}\right)}\right) = \left(1, cos4 - \frac{1}{3}, e^2\right)$ es una terna ordenada o un vector de tres componentes reales.

Tabla 1.7 Ejemplos de funciones de varias variables con valores vectoriales

Función	De donde a donde va	Observación
$g(u,v) = (uv, u^2 - 3v)$	$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$	g es una función de dos variables con valores vectoriales. Los valores que toma la función son pares ordenados o vectores de dos componentes
$h(r,s,t) = \left(\frac{1}{rs}, cosr^2 - t, e^{r+2s-3t}\right)$	$h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$	h es una función de tres variables con valores vectoriales. Los valores que toma la función son ternas ordenadas o vectores de tres componentes
$p(t,u) = \left(t^2 - 5tu + 2u, tlnu, \sqrt{ut}\right)$	$p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$	p es una función de dos variables con valores vectoriales. Los valores que toma la función son ternas ordenadas o vectores de tres componentes
$F(x,y,z) = \left(\frac{1}{xz}, e^{x+2y-3z}\right)$	$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$	F es una función de tres variables con valores vectoriales. Los valores que toma la función son pares ordenados o vectores de dos componentes

Fuente: Elaboración Propia

Nótese que, cada función de la tabla 1.7 es evaluada en elementos de $\mathbb{R}^n$, con $n > 1$; es decir, es evaluada en n-adas ordenadas de números reales. Además, cada función toma valores en el conjunto $\mathbb{R}^m$, con $m > 1$; esto es, toma valores vectoriales, puesto que cada una está definida mediante una m-ada ordenada o vector de m componentes. Por ejemplo, la función $g(u,v) = (uv, u^2 - 3v)$ depende de dos variables u y v, está definida por las funciones componentes: $g_1(u,v) = uv$ y $g_2(u,v) = u^2 - 3v$. Dicho de otro modo, a la función g "entra" un par ordenado (u,v) y "sale" otro par ordenado de la forma $\big(g_1(u,v), g_2(u,v)\big)$.

Luego, para el par ordenado $(1,-2)$ se tiene lo siguiente:

$$g(1,-2) = \big((1)(-2), (1)^2 - 3(-2)\big) = (-2,7)$$

Donde $g(1,-2) = (-2,7)$ es un elemento de $\mathbb{R}^2$ que corresponde al valor que toma la función g en $(1,-2)$. En el caso particular de la función g podemos observar que sus dos funciones componentes g_1 y g_2 están bien definidas (toman valores reales) en cualquier elemento (u,v) de $\mathbb{R}^2$.

1.3 Elementos de una función: Dominio y Rango

Una vez estudiada la definición de función, es el turno de analizar los elementos que la caracterizan, que son el dominio y el rango, conjuntos que se construyen a partir de los conjuntos $\mathbb{R}^n$. En la sección anterior se pudo percibir que las funciones de la forma $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son tales que $\mathbb{R}^n$ contiene a los elementos que "entran" a la función, es decir, los elementos donde ésta puede ser evaluada, que no necesariamente significa que sean elementos donde la función esté definida, recordemos por ejemplo qué pasa al evaluar la función $F(x, y, z) = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}$ en $(5,0,0)$, se vio que aunque $(5,0,0)$ es un elemento de $\mathbb{R}^3$, $F(5,0,0)$ no está definida (no es un número real); mientras que, $\mathbb{R}^m$ contiene los elementos que "salen" de la función, o bien, los valores que la función toma después de ser evaluada, que ya se ha visto que pueden ser valores reales o vectores.

1.3.1 Definición de dominio y rango de una función

Si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función cualquiera, se define a continuación su dominio y rango.

Dominio de f: Es el conjunto de todos los valores $P \in \mathbb{R}^n$ para los cuales $f(P)$ existe.

$Domf = \{P \in \mathbb{R}^n | f(P) \text{ existe}\}$

Así, el dominio de f consta de los elementos de $\mathbb{R}^n$ que "entran" a la función pero que son tales que f evaluada en dichos elementos está bien definida, esto es, tales que el valor que "sale" de la función es un elemento de $\mathbb{R}^m$. Luego, el dominio también puede expresarse por:

$Domf = \{P \in \mathbb{R}^n | f(P) \in \mathbb{R}^m\}$

Rango de f: Es el conjunto de todos los valores posibles $f(P) \in \mathbb{R}^m$, donde P está en el dominio de f.

$Ranf = \{f(P) \in \mathbb{R}^m | P \in Domf\}$

De este modo, el rango de f consta de los elementos de $\mathbb{R}^m$ que "salen" de la función cuando ésta es evaluada en elementos de su dominio.

1.3.2 Ejemplos de funciones de la forma $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ donde se determina su dominio y rango

En la tabla 1.8 se muestran ejemplos de funciones que dependen de una o varias variables con valores reales o vectoriales, junto con su dominio y rango.

Tabla 1.8 Dominio y rango de funciones de la forma $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Función	Dominio	Rango
(a) $f(x) = 5$	$Domf = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$	$Ranf = \{5\}$
(b) $f(x) = x$	$Domf = (-\infty, \infty)$	$Ranf = (-\infty, \infty)$
(c) $f(x) = x^2$	$Domf = (-\infty, \infty)$	$Ranf = [0, \infty)$
(d) $f(x) = \sqrt{x}$	$Domf = [0, \infty)$	$Ranf = [0, \infty)$
(e) $f(x) = \frac{1}{x}$	$Domf = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$Ranf = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
(f) $f(x, y) = x + y$	$Domf = \mathbb{R}^2$	$Ranf = \mathbb{R}$
(g) $f(x, y) = \frac{x}{y}$	$Domf = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \neq 0\}$	$Ranf = \mathbb{R}$
(h) $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$	$Domf = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 16\}$	$Ranf = [0,4]$
(i) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$	$Domf = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y, z) \neq (0,0,0)\}$	$Ranf = (0, \infty)$
(j) $f(x, y) = (y, x)$	$Domf = \mathbb{R}^2$	$Ranf = \mathbb{R}^2$
(k) $f(x) = (x, x^2)$	$Domf = \mathbb{R}$	$Ranf = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | v = u^2\}$
(l) $f(x, y, z) = \left(xyz, \frac{1}{xyz}\right)$	$Domf = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | xyz \neq 0\}$	$Ranf = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | uv = 1\}$
(m) $f(x, y) = \left(\sqrt{x - 1}, x + y, \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\right)$	$Domf = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 1\}$	$Ranf = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 | u \geq 0, 0 < w \leq 1\}$
(n) $f(x, y, z) = \left(e^{xy}, \sqrt{z}, \ln y\right)$	$Domf = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y > 0, z \geq 0\}$	$Ranf = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 | u > 0, v \geq 0\}$

Fuente: Elaboración Propia

Además, las funciones de los incisos (a), (b), (c), (d), (e) y (k), son funciones de una variable; mientras que las funciones de los incisos (f), (g), (h), (i), (j), (l), (m) y (n), son funciones de varias variables. Las funciones de los incisos (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), (h), (i) son funciones de valores reales; mientras que, las de los incisos (j), (k), (l), (m), (n), son funciones de valores vectoriales.

Analizaremos a detalle algunos de los incisos de la tabla 1.8.

(e) $f(x) = \frac{1}{x}$

En este caso, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de una variable, x, que toma valores reales. Como la función está definida mediante una fracción, su dominio son todos los números reales excepto aquellos donde el denominador vale 0; es decir, es el conjunto de todos los números reales distintos de 0. Además, como para $x > 0$ se tiene que $f(x) = \frac{1}{x} > 0$ y para $x < 0$ se tiene que $f(x) = \frac{1}{x} < 0$, la función toma cualquier valor real excepto 0. Por lo tanto, el dominio y el rango coinciden:

$Domf = Ranf = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

(h) $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

En este caso, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función de dos variables, x y y, que toma valores reales. Como la función está definida mediante una raíz cuadrada, la condición para que ésta exista (sea un número real) es que la expresión que se encuentra dentro de la raíz cuadrada sea mayor o igual a cero; es decir, que $16 - x^2 - y^2 \geq 0$. Equivalentemente: $x^2 + y^2 \leq 16$. De este modo, el dominio de esta función está constituido por todos los pares ordenados de la forma $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x^2 + y^2 \leq 16$. Por ejemplo, los pares ordenados $(0,0)$, $(0,4)$, $(4,0)$, $(-4,0)$, $(0, -4)$, $(3,1)$, $(-1, -3)$ están en el dominio de la función, mientras que $(-5,0)$, $(0,5)$, $(4,1)$, $(-1, -4)$ no lo están. Por otro lado, el valor más pequeño que toma la función es 0, y lo toma cuando $x^2 + y^2 = 16$; el mayor valor que toma es 4, y lo toma únicamente en $(0,0)$. De aquí que, el rango de la función dada es el intervalo cerrado $[0,4]$. Por lo tanto:

$Domf = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 16\}$ y $Ranf = [0,4]$.

(k) $f(x) = (x, x^2)$

En este caso, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una función de una variable, x, que toma valores vectoriales, cuyas funciones componentes son: $f_1(x) = x$ y $f_2(x) = x^2$. Luego, el dominio de la función son todos los números reales tales que tanto $f_1(x) = x$ como $f_2(x) = x^2$ existan (sean números reales); de este modo, el dominio es el conjunto de los números reales. Además, el rango es el conjunto de todos los pares ordenados $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tales que $u = f_1(x) = x$ y $v = f_2(x) = x^2$. De aquí que: $v = u^2$. Por lo tanto:

$Domf = \mathbb{R}$ y $Ranf = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | v = u^2\}$.

(n) $f(x, y, z) = \left(e^{xy}, \sqrt{z}, ln\, y\right)$

En este caso, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una función de tres variables, x, y y z, que toma valores vectoriales, cuyas funciones componentes son: $f_1(x, y, z) = e^{xy}$, $f_2(x, y, z) = \sqrt{z}$ y $f_3(x, y, z) = ln\, y$. Luego, el dominio de la función está constituido por todas las ternas ordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que cada una de las funciones componentes exista (sea un número real); así, el dominio es el conjunto de todas las $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $z \geq 0$ y $y > 0$, para que $f_2(x, y, z) = \sqrt{z}$ y $f_3(x, y, z) = ln\, y$ existan. Además, el rango es el conjunto de todas las ternas $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ tales que $u = f_1(x, y, z) = e^{xy}$, $v = f_2(x, y, z) = \sqrt{z}$ y $w = f_3(x, y, z) = ln\, y$; de aquí que, $u > 0$ y $v \geq 0$.

Por lo tanto:

$Domf = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y > 0, z \geq 0\}$ y $Ranf = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 | u > 0, v \geq 0\}$.

Consideremos ahora la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Se trata de una función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de dos variables, x y y, que toma valores reales. Es un ejemplo de una función definida a trozos o por partes, cuyo dominio es todo $\mathbb{R}^2$ y su rango es el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. En efecto: Por un lado, para todo $(x,y) \neq (0,0)$ la función existe (es un número real) puesto que en esos pares ordenados: $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$; por ejemplo, $f(1,1) = \frac{(1)(1)}{(1)^2+(1)^2} = \frac{1}{2}$, $f(1,0) = \frac{(1)(0)}{(1)^2+(0)^2} = \frac{0}{1} = 0$, $f(0,-1) = \frac{(0)(-1)}{(0)^2+(-1)^2} = \frac{0}{1} = 0$ son números reales. Por otro lado, cuando $(x,y) = (0,0)$, se tiene que la función también existe, pues por definición vale 0; es decir, $f(0,0) = 0$. Nótese que, esta última parte se obtiene de la segunda condición de la definición de la función, en ningún momento se tiene $f(0,0) = \frac{0}{(0)^2+(0)^2} = \frac{0}{0}$, puesto que la función está dada por $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ precisamente cuando $(x,y) \neq (0,0)$.

1.4 Tipos de funciones: Polinomiales y Racionales

En esta sección se contemplan únicamente dos tipos de funciones, polinomiales y racionales, que son generalizaciones de las funciones polinomiales y racionales que se estudian en el curso de Cálculo de una Variable.

1.4.1 Definición de función polinomial, su dominio y ejemplos

En este tipo de funciones las variables siempre aparecen con exponente entero y positivo y las únicas operaciones algebraicas involucradas entre las variables son la suma y la multiplicación; además, las variables no aparecen como argumento de funciones trascendentes (funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas). En la tabla 1.9 se muestran algunos ejemplos de funciones polinomiales.

Tabla 1.9 Ejemplos de funciones polinomiales

Función	Dominio	Observación
$f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6$	$\mathbb{R}$	Función polinomial de una variable
$f(x,y) = 16 - x^2 - y^2$	$\mathbb{R}^2$	Función polinomial de dos variables
$f(x,y,z) = x^4y^3z + 5xy^2z^5 - 2x^2yz^7 - 3z$	$\mathbb{R}^3$	Función polinomial de tres variables
$f(t,u,v,w) = t^2 + u^2 + v^2 - w^2$	$\mathbb{R}^4$	Función polinomial de cuatro variables

Fuente: Elaboración Propia

En general, el dominio de una función polinomial de n variables es $\mathbb{R}^n$.

Por otro lado, la tabla 1.10 contiene ejemplos de funciones que no son funciones polinomiales.

Tabla 1.10 Ejemplos de funciones que no son polinomiales

Función	Dominio	Observación
$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$	$[0, \infty)$	No es polinomial, porque interviene la raíz cuadrada de la variable x. Aun cuando se expresa como potencia, el exponente es una fracción (no es entero)
$f(x,y) = \frac{x}{y} = xy^{-1}$	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$	No es polinomial, puesto que interviene una división entre las variables. Aun cuando se expresa como un producto, uno de los exponentes es negativo
$f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$	No es polinomial porque interviene una raíz cuadrada
$f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$	$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) \neq (0,0,0)\}$	No es polinomial porque aparece un exponente fraccionario negativo
$f(x,y) = cos\, x - y + 1$	$\mathbb{R}^2$	No es polinomial porque aparece la expresión “$cos\, x$”
$f(x,y) = sen(x^2 + y^2)$	$\mathbb{R}^2$	No es polinomial porque está definida en términos de la función “seno”
$f(x,y) = ln(x - 3y)$	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 3y > 0\}$	No es polinomial porque está definida en términos de la función “logaritmo natural”
$f(x,y,z) = e^{xyz} - 2xy^2 + 4z$	$\mathbb{R}^3$	No es polinomial porque aparece la expresión “e^{xyz}”

Fuente: Elaboración Propia

1.4.2 Definición de función racional, su dominio y ejemplos

Las funciones racionales se expresan como una división de funciones polinomiales. Algunos ejemplos de funciones racionales se muestran en la tabla 1.11.

Tabla 1.11 Ejemplos de funciones racionales

Función	Dominio	Observación
$f(x) = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	Es una función racional de una variable
$f(x,y) = \frac{x}{y}$	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$	Es una función racional de dos variables
$f(x,y,z) = \frac{xy}{x^2 + y^2 + z^2}$	$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) \neq (0,0,0)\}$	Es una función racional de tres variables
$f(w,x,y,z) = \frac{x^2 - 3xy + 5y^3 z}{x^4 + 4z^2 - 2w}$	$\{(w,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 \mid x^4 + 4z^2 - 2w \neq 0\}$	Es una función racional de cuatro variables

Fuente: Elaboración Propia

Mientras que, en la tabla 1.12 se muestran ejemplos de funciones que no son funciones racionales.

Tabla 1.12 Ejemplos de funciones que no son racionales

Función	Dominio	Observación
$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$	No es una función racional, puesto que el denominador no es una función polinomial
$f(x,y) = \frac{e^{2x} - 3xy + 1}{x^2 + y^2}$	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$	No es una función racional, puesto que el numerador no es una función polinomial
$f(x,y,z) = \frac{x^5 - 5xy + 2z - cos(x-y)}{x^3 + y^3}$	$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 \neq 0\}$	No es una función racional, puesto que el numerador no es una función polinomial
$f(x,y,z) = \frac{x^5 - 5xy + 2z}{ln(x^3 + y^3 + z^3)}$	$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3 > 0\}$	No es una función racional, puesto que el denominador no es una función polinomial

Fuente: Elaboración Propia

En general, el dominio de una función racional de n variables es el conjunto de todas las n-adas ordenadas de números reales (elementos de $\mathbb{R}^n$) tales que no anulan (hacen cero) su denominador.

Es importante destacar que las funciones polinomiales y las funciones racionales siempre toman valores reales.

1.5 Composición de funciones

Se sabe que las funciones reales de una variable se pueden sumar, restar, multiplicar, dividir e incluso elevar a una potencia o extraer una raíz, siendo el resultado una nueva función. Esto mismo ocurre para las funciones de varias variables. Más aún, existe una operación, exclusiva de las funciones, que es la composición de funciones, que trae como resultado una función compuesta. Esta sección está dedicada a definir este tipo de operación entre funciones de varias variables.

1.5.1 Definición de composición de funciones

Sean $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ dos funciones cualesquiera. Se define la composición de f con g como la función $f \circ g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ dada por $(f \circ g)(P) = f\big(g(P)\big)$, para todo $P \in Domg$ tal que $g(P) \in Domf$.

Observación: Para que la composición de f con g, $f \circ g$, en ese estricto orden esté definida, se requiere que el número m de componentes de la función interna g coincida con el número m de variables de la función externa f.

1.5.2 Ejemplos

1. Sean $f(t) = t^2$ y $g(x, y) = x + 2y$. Encuentra la composición de f con g.

Solución:

En este caso, se busca la composición de f con g, $f \circ g$, que de acuerdo con la definición implica evaluar la función f en la función g, del siguiente modo:

$(f \circ g)(P) = f\big(g(P)\big)$ *por la definición 1.5.1*

$= f\big(g(x, y)\big)$ *sustituyendo* $P = (x, y)$

$= f(x + 2y)$ *sustituyendo* $g(x, y) = x + 2y$

$= (x + 2y)^2$ *evaluando* $f(t) = t^2$ *en* $t = x + 2y$

para todo $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, donde la evaluación de las funciones se realiza de adentro hacia afuera; esto es, iniciando con la función más interna que, en este caso, es la función $g(x, y) = x + 2y$, para posteriormente evaluar la función externa que, en este caso, es la función $f(t) = t^2$.

De este modo, como la función interna g va de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y la función externa f va de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, se tiene que la función compuesta $f \circ g$ va de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y está definida por:

$(f \circ g)(x, y) = (x + 2y)^2$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

En efecto, $(f \circ g)(x, y) = (x + 2y)^2$ es una función de dos variables con valores reales. Además: $Domf = \mathbb{R}$, $Domg = \mathbb{R}^2$ y $Dom(f \circ g) = \mathbb{R}^2$.

Más aún, es posible observar que la composición en el otro sentido, $g \circ f$, no está definida. Si ahora la función interna es f y la función externa es g, se tiene que, en la primera, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ con $m = 1$, mientras que, en la segunda, $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ con $m = 2$.

2. Sean $f(x,y) = xy^2 + x^2y$ y $g(u,v) = (u+v, uv)$. Calcula $f \circ g$.

Solución:

En este caso, $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la función interna y $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la función externa, por lo que su composición $f \circ g$ está definida y es la función $f \circ g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$(f \circ g)(P) = f\big(g(P)\big)$
por la definición 1.5.1

$= f\big(g(u,v)\big)$
sustituyendo $P = (u,v)$

$= f(u+v, uv)$
sustituyendo $g(u,v) = (u+v, uv)$

$= (u+v)(uv)^2 + (u+v)^2(uv)$
evaluando $f(x,y) = xy^2 + x^2y$ *en* $x = u+v$, $y = uv$

O bien: $(f \circ g)(u,v) = u^3v^2 + u^2v^3 + u^3v + 2u^2v^2 + uv^3$, para todo $P = (u,v) \in \mathbb{R}^2$. Además: $Domf = Domg = Dom(f \circ g) = \mathbb{R}^2$. Nuevamente, la composición en el otro sentido, $g \circ f$, no está definida.

3. Sean $g(t) = (e^t, \cos t, t^2)$ y $f(x,y,z) = xy^2z^3$. Encuentra $f \circ g$ y $g \circ f$ y sus respectivos dominios.

Solución:

Considerando primero $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ como la función interna y $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como la función externa, la composición $f \circ g$ está definida y es la función $f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$(f \circ g)(t) = f\big(g(t)\big)$
por la definición 1.5.1, con $P = t$

$= f(e^t, \cos t, t^2)$
sustituyendo $g(t) = (e^t, \cos t, t^2)$

$= e^t(\cos t)^2(t^2)^3$
evaluando $f(x,y,z) = xy^2z^3$*en* $x = e^t$, $y = \cos t$, $z = t^2$

$= t^6e^t\cos^2 t$
efectuando las potencias y acomodando factores

Es decir:

$(f \circ g)(t) = t^6e^t\cos^2 t$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Considerando ahora $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como la función interna y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ como la función externa, la composición $g \circ f$ está definida y es la función $g \circ f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$(g \circ f)(x,y,z) = g\big(f(x,y,z)\big)$
por la definición 1.5.1, con $P = (x,y,z)$

$= g(xy^2z^3)$
sustituyendo $f(x,y,z) = xy^2z^3$

$= \left(e^{xy^2z^3}, \cos(xy^2z^3)\,, (xy^2z^3)^2\right)$
evaluando $g(t) = (e^t, \cos t\,, t^2)$ *en* $t = xy^2z^3$

O bien:

$(g \circ f)(x,y,z) = \left(e^{xy^2z^3}, \cos(xy^2z^3)\,, (xy^2z^3)^2\right)$ para toda $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Además:

$Domf = \mathbb{R}^3$, $Domg = \mathbb{R}$, $Dom(f \circ g) = \mathbb{R}$ y $Dom(g \circ f) = \mathbb{R}^3$.

En este caso, se tiene que $f \circ g$ y $g \circ f$ existen; sin embargo, $f \circ g \neq g \circ f$. Así se tiene que, en general, la composición de funciones NO es conmutativa.

1.6 Gráficas de Funciones

En esta sección se centra la atención en representar las funciones reales de dos variables de manera gráfica, lo cual, al igual que en el caso de funciones reales de una variable, sirve de apoyo para entender mejor el comportamiento de las funciones. Se inicia recordando la definición de gráfica de una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que en notación de conjunto está dada por:

$graf(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = f(x), x \in Domf\}$

O bien:

$graf(f) = \left\{\left(x, f(x)\right) \in \mathbb{R}^2 | x \in Domf\right\}$

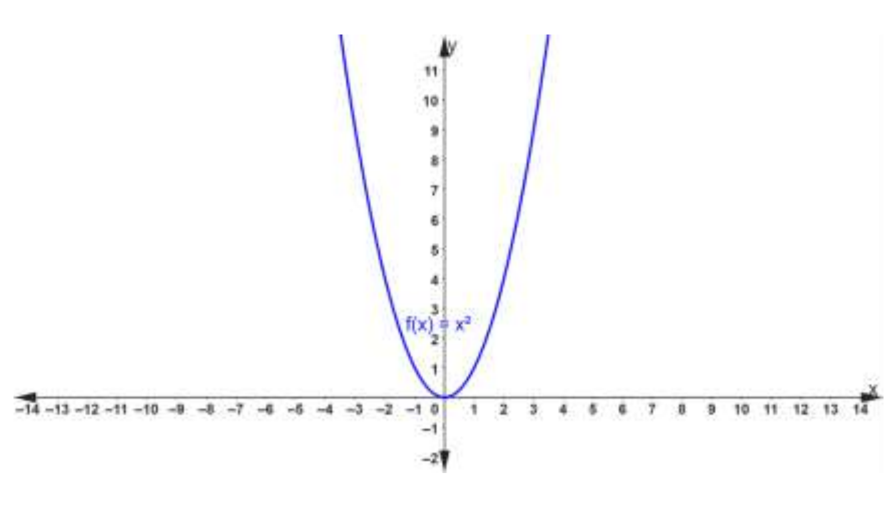
Es decir, la gráfica de una función real de una variable está constituida por todos los pares ordenados de la forma (x,y), donde la primera coordenada, x, está en el dominio de la función y la segunda coordenada, $y = f(x)$, es el valor que toma ésta en x. En general, la gráfica es una curva que se visualiza en el plano cartesiano.

Una técnica común que se utiliza para realizar la gráfica de una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es construir una tabla vertical de dos columnas, donde en la primera columna se proponen los valores de x, tomados del dominio de f; mientras que, en la segunda columna de la tabla, se van escribiendo los valores obtenidos al evaluar la función en el correspondiente valor de x de la primera columna, esto es, se escribe el valor de $y = f(x)$, formándose así los pares ordenados (x,y), donde $x \in Domf$ y $y = f(x)$, que serán ubicados en el plano cartesiano. Se proponen tantos valores de $x \in Domf$ como sean necesarios para determinar la gráfica de la función.

Por ejemplo, si se considera la función $f(x) = x^2$, se ha visto anteriormente que su dominio es todo $\mathbb{R}$, y es posible determinar su gráfica a partir de una tabla como la descrita previamente, como se muestra en la tabla 1.13.

Tabla 1.13 Tabla y gráfica para la función $f(x) = x^2$

x	$y = x^2$
-3	9
-2.5	6.25
-2	4
-1.5	2.25
-1	1
-0.5	0.25
0	0
0.5	0.25
1	1
1.5	2.25
2	4
2.5	6.25
3	9



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico

De este modo, la gráfica de $f(x) = x^2$ está constituida por todos los pares ordenados de la forma (x, x^2), donde x es cualquier número real, que se visualiza en el plano cartesiano como una parábola vertical que abre hacia arriba con vértice en el origen. En notación de conjunto:

$$graf(f) = \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}\}$$

1.6.1 Definición de gráfica de una función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Se define ahora la gráfica de una función real de dos variables, esto es, la gráfica de una función de la forma $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, como el conjunto de las ternas ordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $(x, y) \in Domf$ y $z = f(x, y)$. En notación de conjunto, la gráfica de f se expresa por:

$$graf(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x, y), (x, y) \in Domf\}$$

O bien:

$$graf(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in Domf\}$$

En general, la gráfica de una función real de dos variables es una superficie que se visualiza en el espacio o sistema de coordenadas tridimensional.

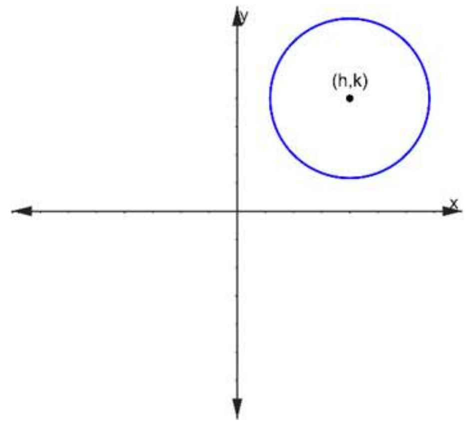
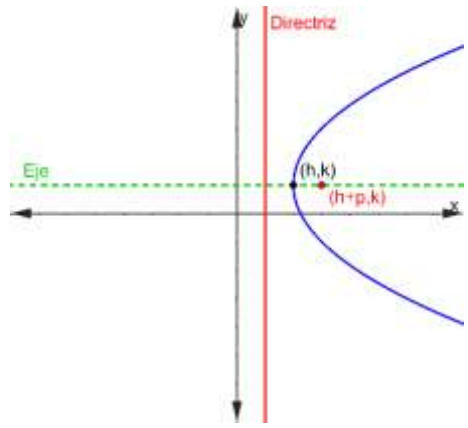
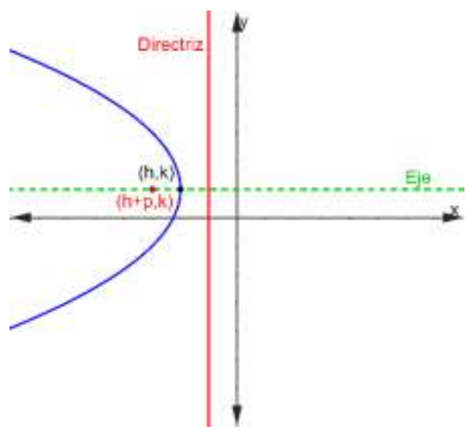
Por otro lado, la técnica de tabular, empleada para graficar funciones reales de una variable, ya no es útil para realizar la gráfica de una función real de dos variables, sino que se hace uso de las intersecciones de la superficie (gráfica de la función) con los planos coordenados xy, xz y yz o, de ser necesario, con planos paralelos a estos.

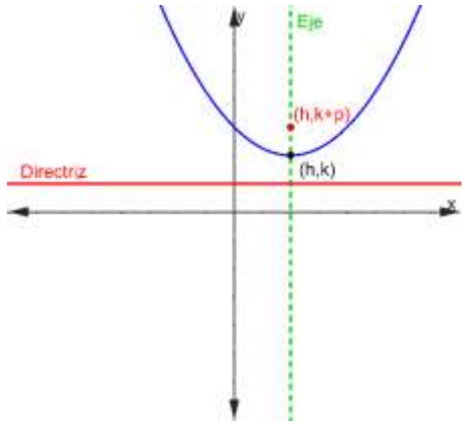
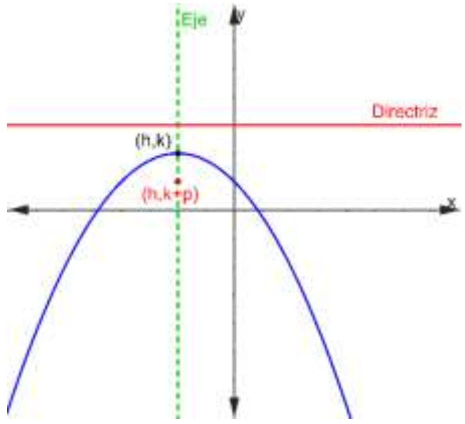
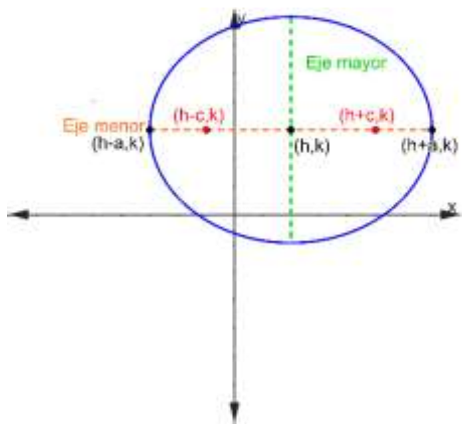
1.6.2 Definición de traza de una función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

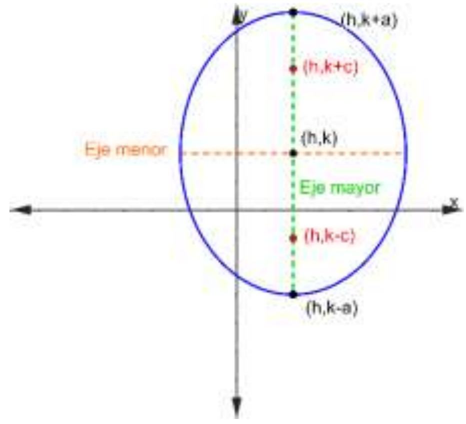
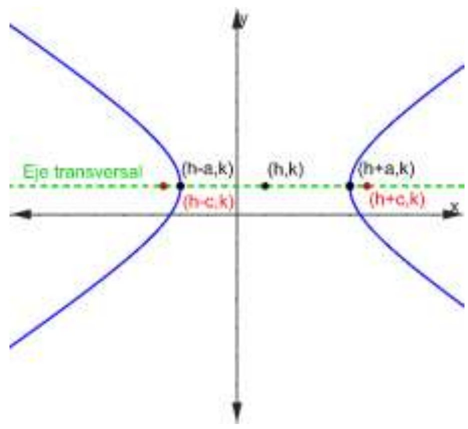
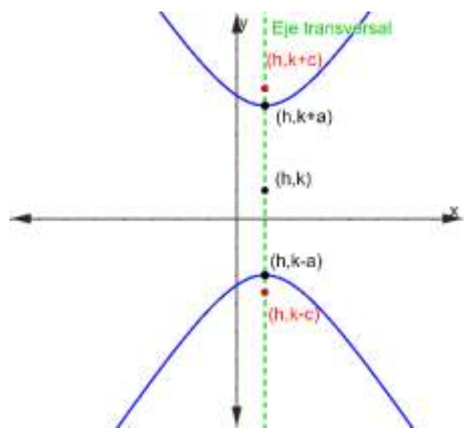
La traza de una función de la forma $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la curva de intersección entre la gráfica de la función (superficie) y los planos coordenados xy, xz y yz o con planos paralelos a estos.

Comúnmente, las trazas son secciones cónicas como parábolas, elipses, hipérbolas y circunferencias, pero también pueden ser puntos, rectas o gráficas de funciones algebraicas y no algebraicas (trascendentes). En la tabla 1.14, se muestra de manera resumida las cónicas con su ecuación en forma canónica o estándar y su gráfica.

Tabla 1.14 Cónicas

Cónica	Ecuación Canónica	Gráfica
Circunferencia	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ Centro: (h,k) Radio: r	
Parábola	Con eje paralelo al eje x (eje horizontal) y que abre hacia la derecha $(y-k)^2=4p(x-h)$ con $p>0$ Vértice: (h,k) Foco: $(h+p,k)$ Directriz: $x=h-p$	
	Con eje paralelo al eje x (eje horizontal) y que abre hacia la izquierda $(y-k)^2=4p(x-h)$ con $p<0$ Vértice: (h,k) Foco: $(h+p,k)$ Directriz: $x=h-p$	

Cónica	Ecuación Canónica	Gráfica
Parábola	Con eje paralelo al eje y (eje vertical) y que abre hacia arriba $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ con $p > 0$ Vértice: (h, k) Foco: $(h, k+p)$ Directriz: $y = k - p$	
	Con eje paralelo al eje y (eje vertical) y que abre hacia abajo $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ con $p < 0$ Vértice: (h, k) Foco: $(h, k+p)$ Directriz: $y = k - p$	
Elipse	Con eje mayor paralelo al eje x (eje mayor horizontal) $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ con $a > b$ y $c^2 = a^2 - b^2$ Centro: (h, k) Vértices: $(h-a, k)$ y $(h+a, k)$ Focos: $(h-c, k)$ y $(h+c, k)$ Longitud de eje mayor: $2a$ Longitud de eje menor: $2b$	

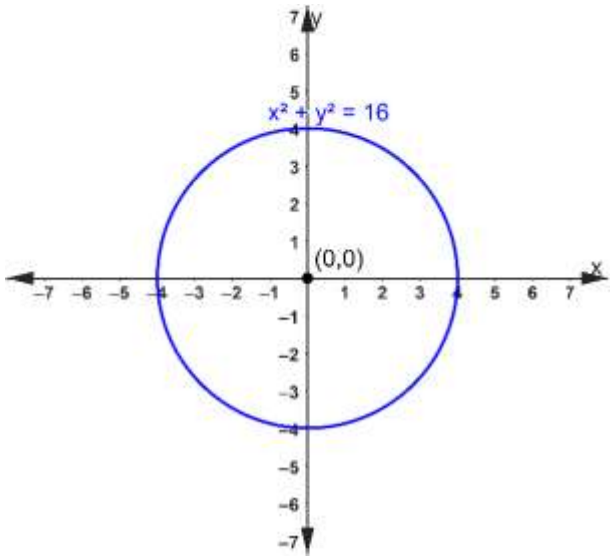
Cónica	Ecuación Canónica	Gráfica
Elipse	Con eje mayor paralelo al eje y (eje mayor vertical) $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ con $a>b$ y $c^2=a^2-b^2$ Centro: (h,k) Vértices: $(h,k-a)$ y $(h,k+a)$ Focos: $(h,k-c)$ y $(h,k+c)$ Longitud de eje mayor: $2a$ Longitud de eje menor: $2b$	
Hipérbola	Con eje transversal paralelo al eje x (eje transversal horizontal) $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ con $c^2=a^2+b^2$ Centro: (h,k) Vértices: $(h-a,k)$ y $(h+a,k)$ Focos: $(h-c,k)$ y $(h+c,k)$	
	Con eje transversal paralelo al eje y (eje transversal vertical) $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ con $c^2=a^2+b^2$ Centro: (h,k) Vértices: $(h,k-a)$ y $(h,k+a)$ Focos: $(h,k-c)$ y $(h,k+c)$	

Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico

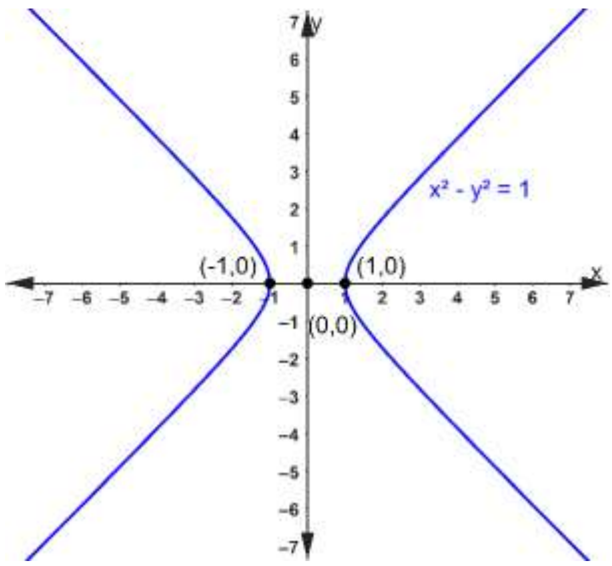
De este modo, la expresión $x^2+y^2=16$ es la ecuación canónica de la circunferencia con centro $(h,k)=(0,0)$ y radio $r=4$; mientras que la expresión $x^2-y^2=1$ es la ecuación canónica de la hipérbola con eje transversal horizontal, con centro $(h,k)=(0,0)$ y vértices $(h-a,k)=(-1,0)$ y $(h+a,k)=(1,0)$. Ver las gráficas en la figura 1.12(a)-(b).

Figura 1.12(a)-(b) Gráficas de dos cónicas

(a) Gráfica de la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$



(b) Gráfica de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$

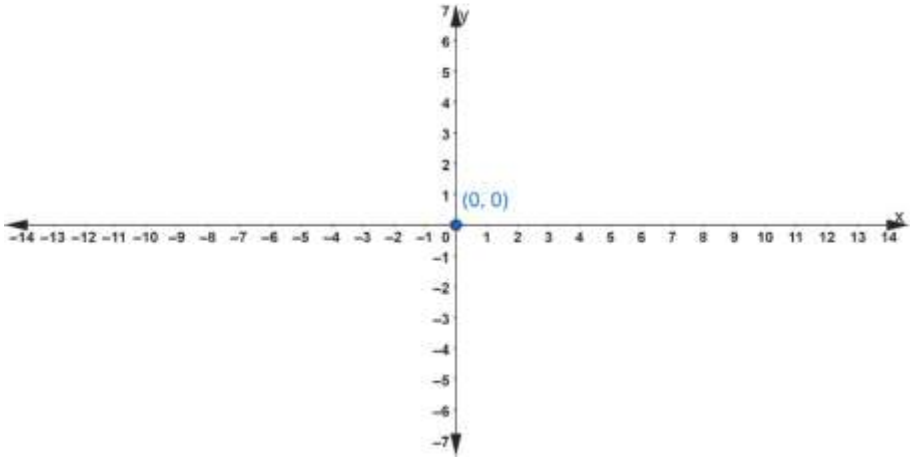


Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico

1.6.3 Ejemplos de gráficas de funciones de la forma $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

En esta sección se ocuparán las trazas para analizar las gráficas de funciones reales en dos variables. En primer lugar, se considerará la función $f(x, y) = x^2 + y^2$, la cual es una función real de dos variables; esto es, es una función que, efectivamente, va de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$. Además, es una función de tipo polinomial cuyo dominio es todo $\mathbb{R}^2$. Para determinar las trazas con los planos coordenados xy, xz y yz, es conveniente expresar la función como una ecuación de la forma $z = f(x, y)$; en este caso, como $z = x^2 + y^2$, para, posteriormente, reemplazar en ésta alguna de las variables, x, y, o z, por 0, dependiendo de cuál sea la traza de interés. Si iniciamos con la traza con el plano xy (o simplemente, traza xy), se sustituye la ecuación de dicho plano en la ecuación que define a la función; es decir, se sustituye $z = 0$ en $z = x^2 + y^2$, obteniéndose que $x^2 + y^2 = 0$, que sólo se cumple para cuando ambas variables toman el valor de 0; esto es, para $x = 0$ y $y = 0$. De aquí que, la traza xy es un único punto, el $(0,0)$, que se muestra en la figura 1.13.

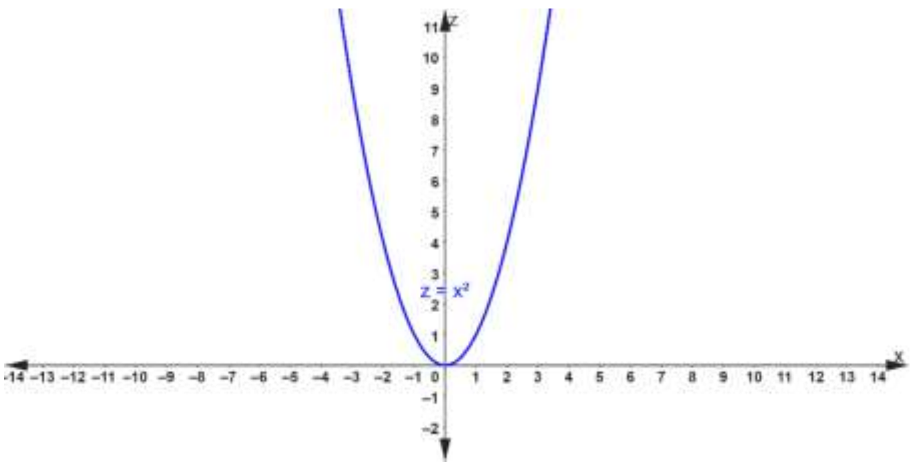
Figura 1.13 Traza xy de $f(x, y) = x^2 + y^2$, en el plano xy



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico

Para calcular la traza con el plano xz (o traza xz), se sustituye ahora $y = 0$, que es la ecuación del plano xz, en $z = x^2 + y^2$, resultando $z = x^2$. De este modo, la traza xz es una parábola en el plano xz, tal como se muestra en la figura 1.14.

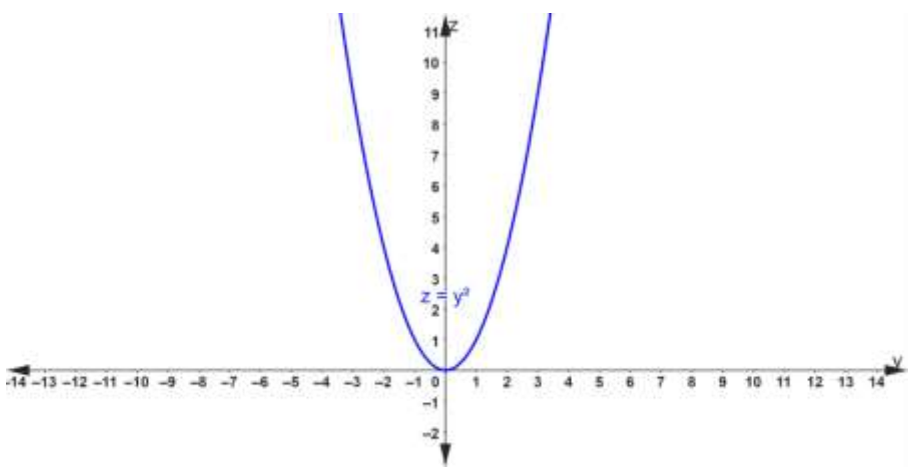
Figura 1.14 Traza xz de $f(x, y) = x^2 + y^2$, en el plano xz



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico

Para calcular la traza con el plano yz (o traza yz), se sustituye ahora $x = 0$, que es la ecuación del plano yz, en $z = x^2 + y^2$, obteniéndose que $z = y^2$. De aquí que, la traza yz es una parábola en el plano yz, tal como se muestra en la figura 1.15.

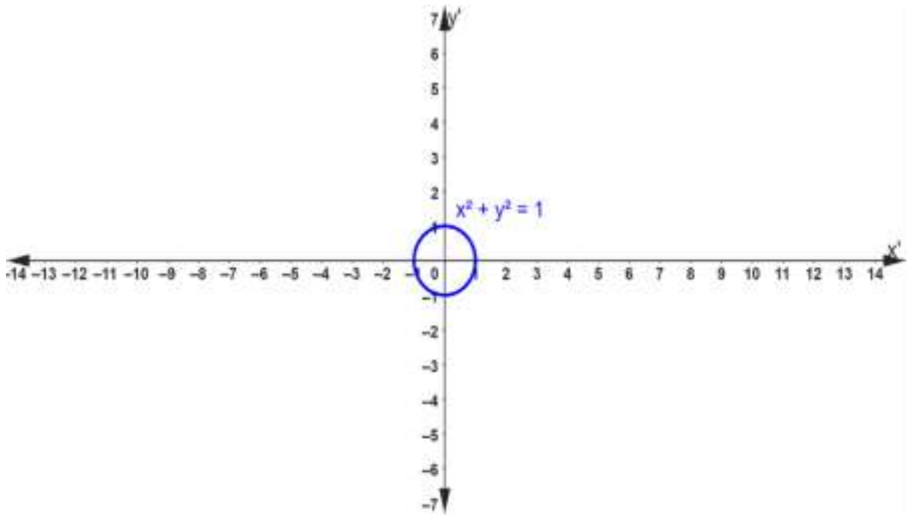
Figura 1.15 Traza yz de $f(x, y) = x^2 + y^2$, en el plano yz



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico

Para tener una idea más clara de cómo se visualiza la gráfica de la función analizada, conviene considerar trazas paralelas con el plano xy, lo cual se puede lograr proponiendo para la variable z valores distintos de 0. Por ejemplo, $z = 1$, representa la ecuación de un plano paralelo al plano coordenado xy, separado una unidad por encima de éste. Si se sustituye $z = 1$ en $z = x^2 + y^2$, entonces se llega a que $x^2 + y^2 = 1$, ecuación que representa a la circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio 1. En otras palabras, la traza con el plano $z = 1$ es la circunferencia, ubicada en dicho plano, de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, como se muestra en la figura 1.16.

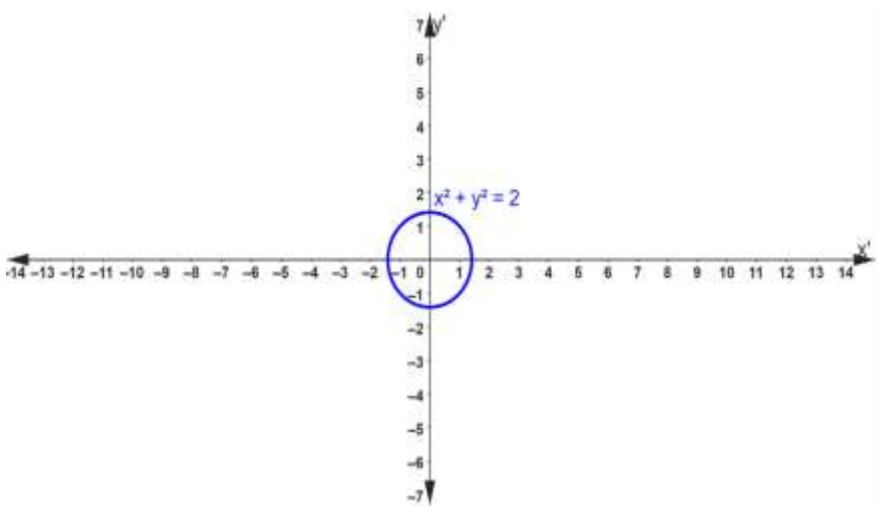
Figura 1.16 Traza con el plano $z = 1$ de $f(x, y) = x^2 + y^2$, en el plano $z = 1$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico

De manera análoga, si se sustituye $z = 2$ en $z = x^2 + y^2$, entonces se llega a que $x^2 + y^2 = 2$, ecuación que representa a la circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio $\sqrt{2}$; es decir, la traza con el plano $z = 2$ es la circunferencia, ubicada en dicho plano, de ecuación $x^2 + y^2 = 2$, como se muestra en la figura 1.17.

Figura 1.17 Traza con el plano $z = 2$ de $f(x, y) = x^2 + y^2$, en el plano $z = 2$



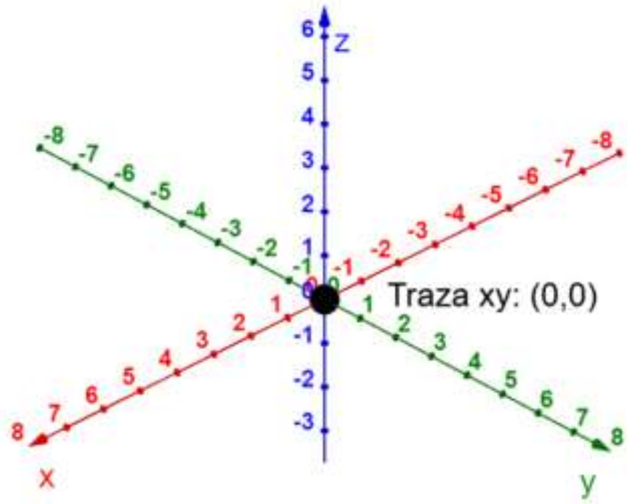
Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico

En general, siempre que se sustituye $z = k$, con $k > 0$, en $z = x^2 + y^2$, resulta $x^2 + y^2 = k$, que es la ecuación de la circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio $\sqrt{k}$; así, la traza con el plano $z = k$ es la circunferencia, ubicada en dicho plano, de ecuación $x^2 + y^2 = k$. Por otro lado, si se sustituye $z = k$, con $k < 0$, en $z = x^2 + y^2$, resulta un absurdo o imposible; pues la expresión $x^2 + y^2$ siempre toma valores mayores o iguales a 0 (no negativos).

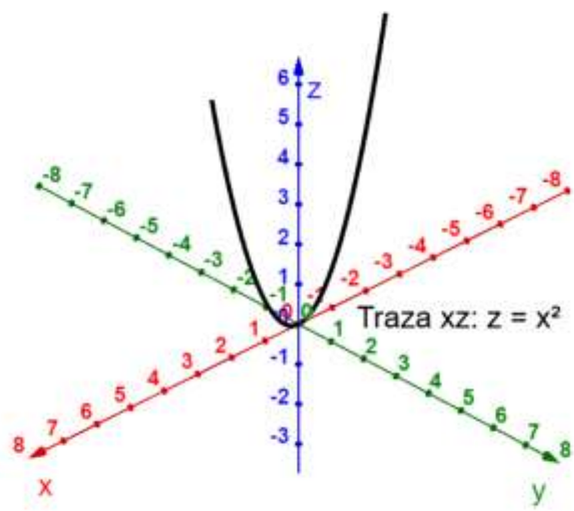
Nótese que las trazas obtenidas son cónicas (con excepción de la traza xy, que es un punto y no una cónica) que se ubican en los diferentes planos coordenados, o en planos paralelos a los planos coordenados; esto es, tienen dos dimensiones. Si ubicamos ahora dichas trazas en el sistema de coordenadas tridimensional, quedarían como se muestra en la figura 1.18(a)-(f).

Figura 1.18(a)-(f) Trazas de $f(x, y) = x^2 + y^2$, en el sistema de coordenadas tridimensional

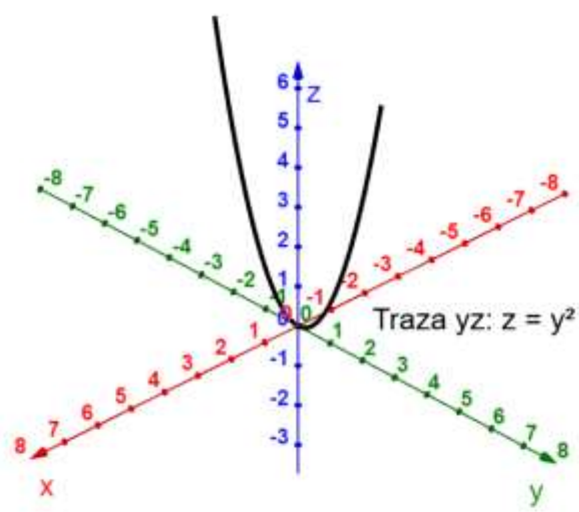
(a) Traza xy



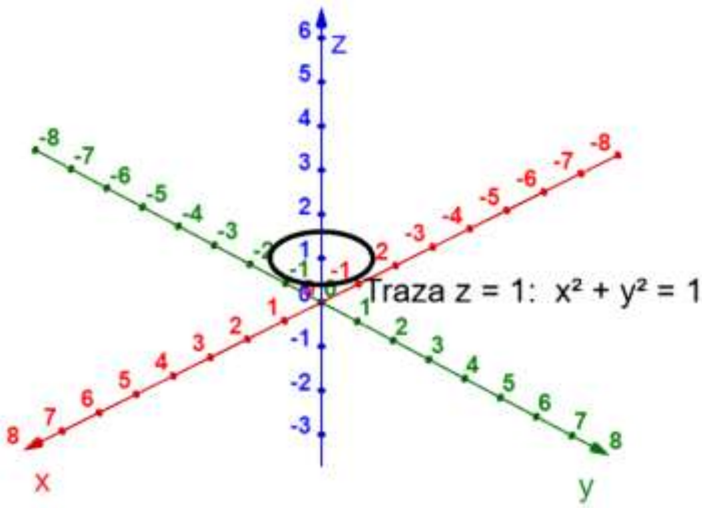
(b) Traza xz



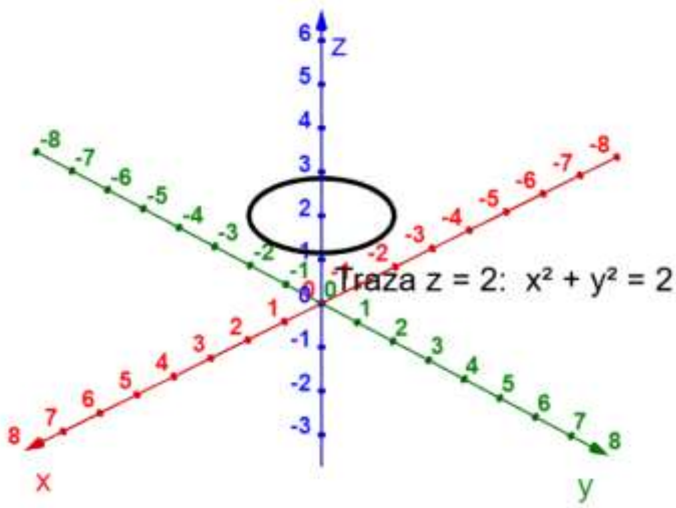
(c) Traza yz



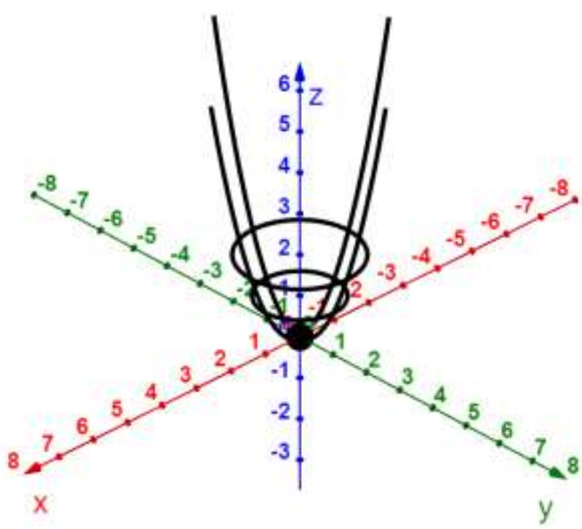
(d) Traza con el plano $z = 1$



(e) Traza con el plano $z = 2$



(f) Todas las trazas encontradas de $f(x, y) = x^2 + y^2$, en el sistema de coordenadas tridimensional

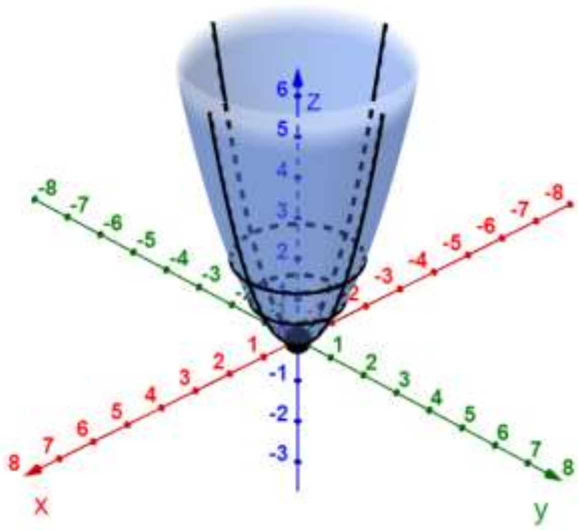


Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

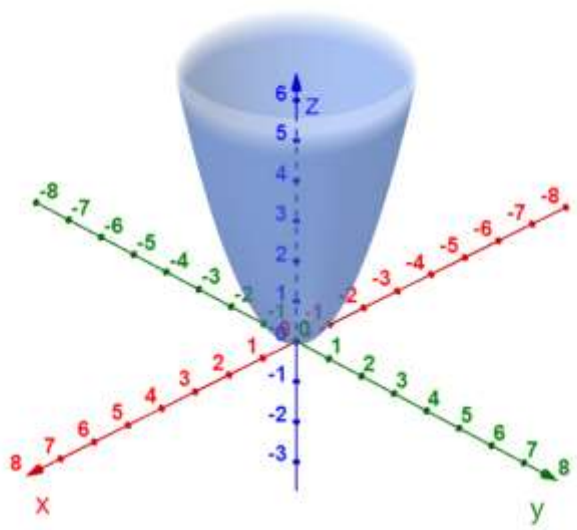
La gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ se conoce como paraboloide circular, en virtud de que sus trazas verticales (con los planos xz y yz) son parábolas y sus trazas horizontales (con planos paralelos al plano xy) son circunferencias. Ver la figura 1.19(a)-(b).

Figura 1.19 (a)-(b) Gráfica de $f(x, y) = x^2 + y^2$

(a) Gráfica de $f(x, y) = x^2 + y^2$, con sus trazas



(b) Gráfica de $f(x, y) = x^2 + y^2$: *Paraboloide Circular*

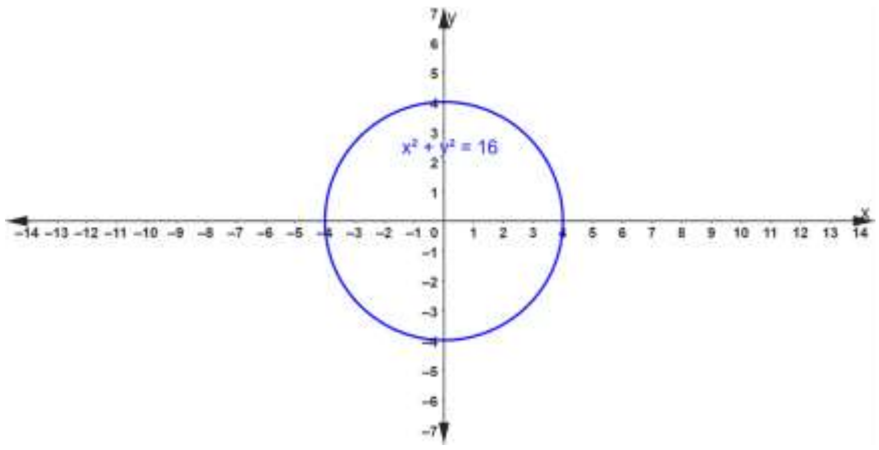


Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

Consideremos ahora la función $g(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, la cual va de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ y su dominio es $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 16\}$. Para determinar las trazas con los planos coordenados xy, xz y yz, es conveniente expresar a la función como la ecuación $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

Para la traza xy, se sustituye $z = 0$ (ecuación del plano xy) en $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, obteniéndose que $\sqrt{16 - x^2 - y^2} = 0$, o bien, $x^2 + y^2 = 16$, que es la ecuación de la circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio 4. De aquí que, la traza xy es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 16$, que se muestra en la figura 1.20.

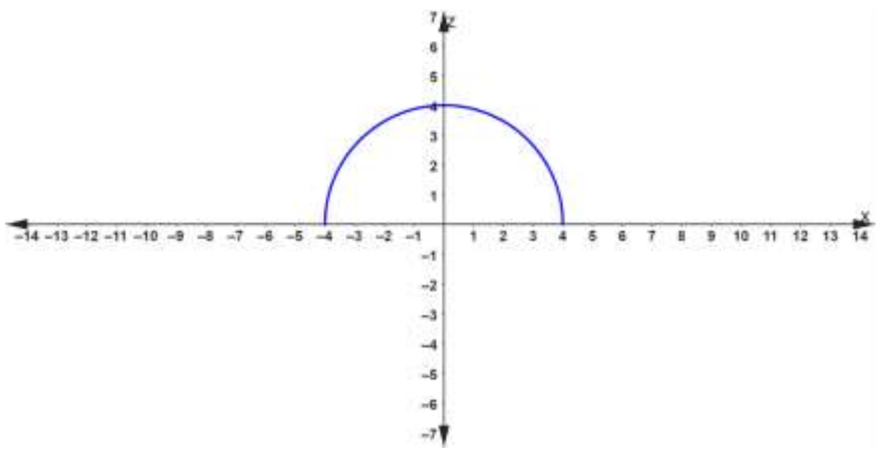
Figura 1.20 Traza xy de $g(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, en el plano xy



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico

Para la traza xz, se sustituye $y = 0$ (ecuación del plano xz) en $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, resultando $z = \sqrt{16 - x^2}$, ecuación que representa a la mitad superior de la circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio 4, ubicada en el plano xz, como se muestra en la figura 1.21.

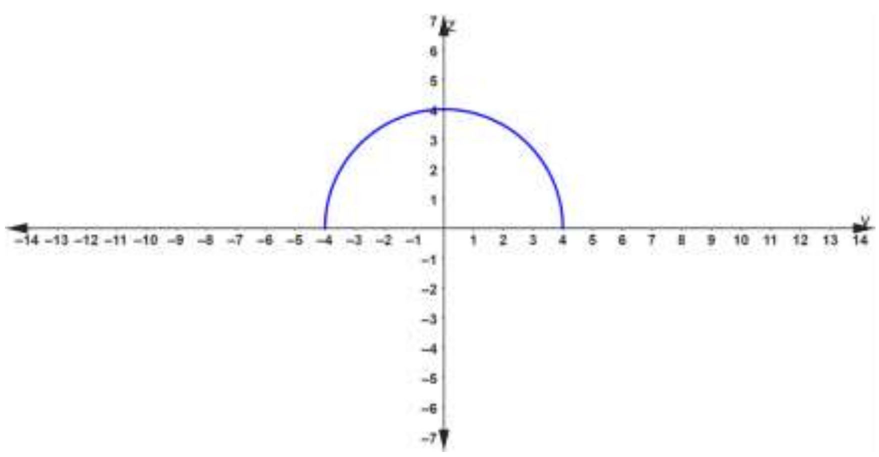
Figura 1.21 Traza xz de $g(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, en el plano xz



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico

Para la traza yz, se sustituye $x = 0$ (ecuación del plano yz) en $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, obteniéndose $z = \sqrt{16 - y^2}$, ecuación que representa a la mitad superior de la circunferencia con centro en $(0,0)$ y radio 4, ubicada ahora en el plano yz, como se muestra en la figura 1.22.

Figura 1.22 Traza yz de $g(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, en el plano yz

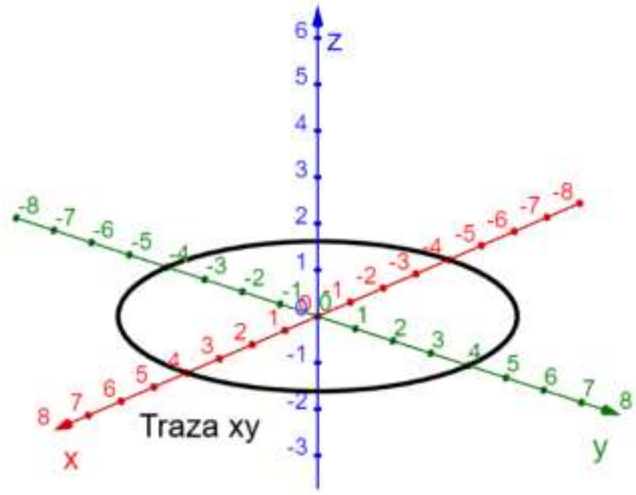


Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico

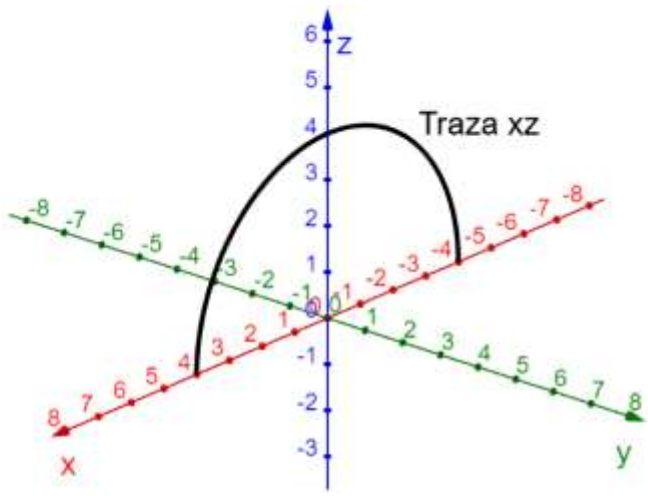
Si ubicamos dichas trazas en el sistema de coordenadas tridimensional, quedarían como se muestra en la figura 1.23(a)-(d).

Figura 1.23(a)-(d) Trazas de $g(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, en el sistema de coordenadas tridimensional

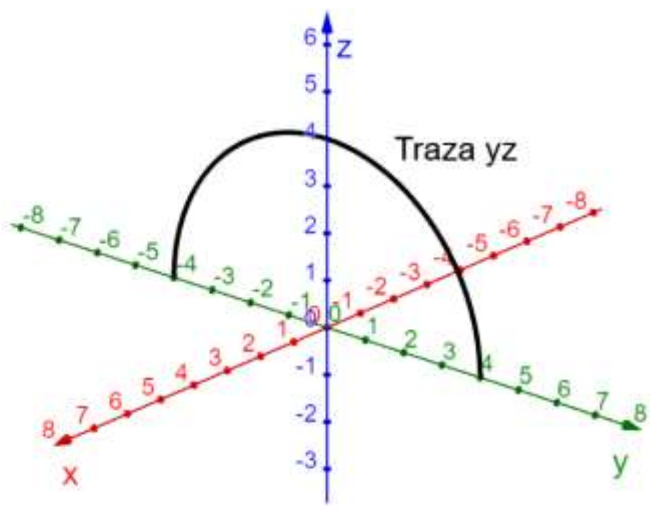
(a) Traza xy



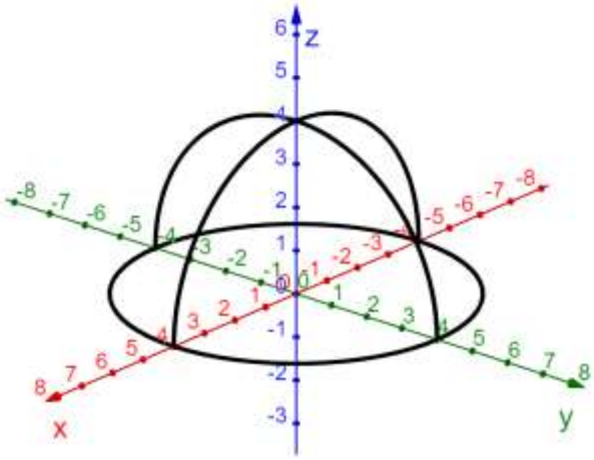
(b) Traza xz



(c) Traza yz



(d) Todas las trazas encontradas de $g(x,y)=\sqrt{16-x^2-y^2}$, en el sistema de coordenadas tridimensional

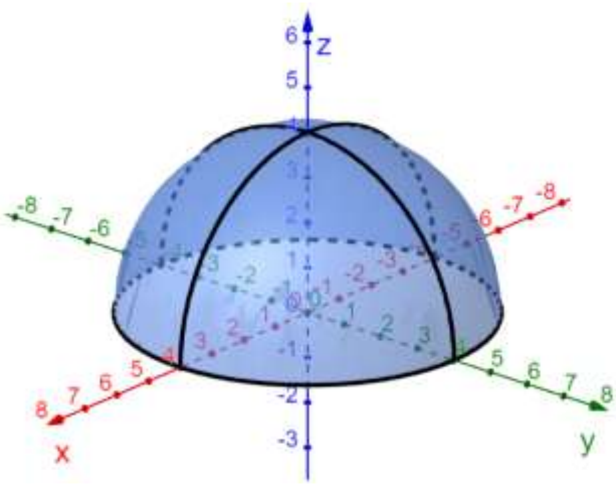


Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

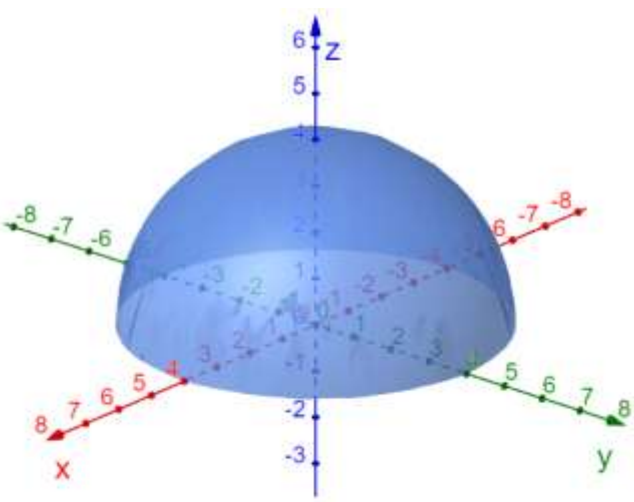
De este modo, la gráfica de la función $g(x,y)=\sqrt{16-x^2-y^2}$ es la mitad superior de la esfera con centro en el $(0,0,0)$ y radio 4. Ver la figura 1.24(a)-(b).

Figura 1.24(a)-(b) Gráfica de $g(x,y)=\sqrt{16-x^2-y^2}$

(a) Gráfica de $g(x,y)=\sqrt{16-x^2-y^2}$, con sus trazas



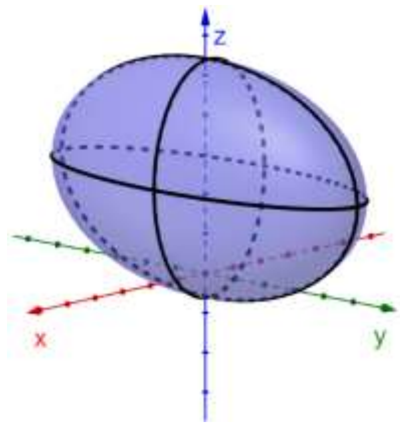
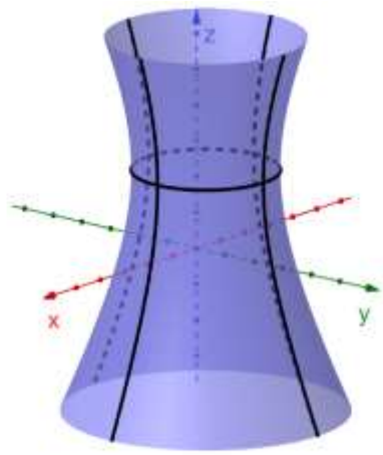
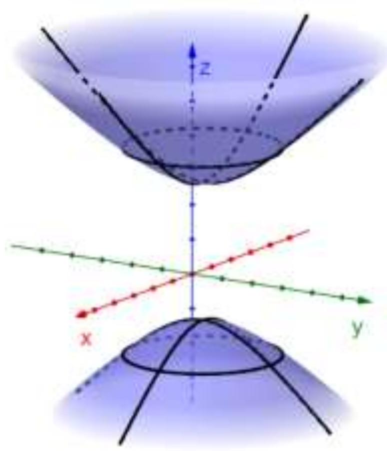
(b) Gráfica de $g(x,y)=\sqrt{16-x^2-y^2}$: *Mitad superior de una esfera*

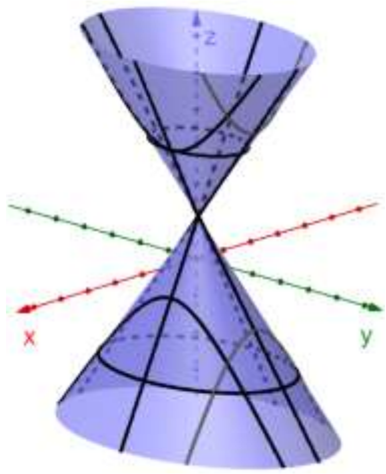
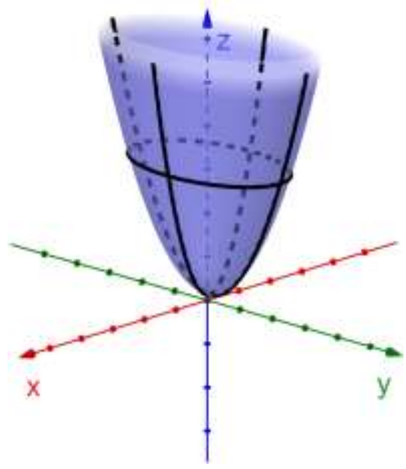
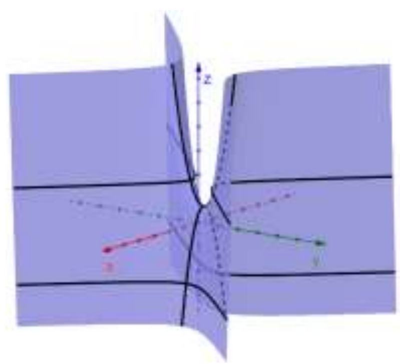


Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

Para finalizar este capítulo, en la tabla 1.15, se muestra en forma resumida las superficies cuádricas (superficies cuyas trazas, en su mayoría, son cónicas) con su ecuación canónica, sus trazas y su gráfica, con la finalidad de que el lector pueda identificar a partir de la ecuación o gráfica a la superficie cuando ésta o parte de ésta representa la gráfica de una función real de dos variables.

Tabla 1.15 Superficies Cuádricas

Superficie	Ecuación Canónica/Trazas	Gráfica
Elipsoide	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$ Centro: (x_0, y_0, z_0) Traza paralela al plano xy: Elipse Traza paralela al plano xz: Elipse Traza paralela al plano yz: Elipse La superficie es una esfera si: $a=b=c\neq 0$ En consecuencia, todas sus trazas son circunferencias en lugar de elipses	
Hiperboloide de una hoja	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$ Centro: (x_0, y_0, z_0) Traza paralela al plano xy: Elipse Traza paralela al plano xz: Hipérbola Traza paralela al plano yz: Hipérbola El eje del hiperboloide corresponde a la variable que aparece en el término con coeficiente de signo negativo	
Hiperboloide de dos hojas	$\frac{(z-z_0)^2}{c^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ Centro: (x_0, y_0, z_0) Traza paralela al plano xy: Elipse Traza paralela al plano xz: Hipérbola Traza paralela al plano yz: Hipérbola El eje del hiperboloide corresponde a la variable que aparece en el término con coeficiente de signo positivo. Además, no existe la traza con el plano coordenado perpendicular a dicho eje	

Superficie	Ecuación Canónica/Trazas	Gráfica
Cono elíptico	$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=0$ Centro: (x_0, y_0, z_0) Traza paralela al plano xy: Elipse Traza paralela al plano xz: Hipérbola Traza paralela al plano yz: Hipérbola El eje del cono corresponde a la variable que aparece en el término con coeficiente de signo negativo. Además, las trazas con los planos coordenados paralelos a ese eje son rectas que se cortan	
Paraboloide elíptico	$\frac{z-z_0}{c^2}=\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}$ Vértice: (x_0, y_0, z_0) Traza paralela al plano xy: Elipse Traza paralela al plano xz: Parábola Traza paralela al plano yz: Parábola El eje del paraboloide corresponde a la variable que aparece en el término elevado a la primera potencia	
Paraboloide hiperbólico	$\frac{z-z_0}{c^2}=\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}$ Vértice: (x_0, y_0, z_0) Traza paralela al plano xy: Hipérbola Traza paralela al plano xz: Parábola Traza paralela al plano yz: Parábola El eje del paraboloide corresponde a la variable que aparece en el término elevado a la primera potencia	

Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D
(Adaptada a partir de Larson, Hostetler, Edwards y Heyd, 1996)

De aquí que, la gráfica de la función $f(x,y)=x^2+y^2$, de ecuación $z=x^2+y^2$, es un paraboloide circular (en lugar de elíptico), puesto que su ecuación es de la forma:

$$\frac{z-z_0}{c^2}=\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}$$

Donde su vértice es $(x_0, y_0, z_0)=(0,0,0)$ y $a=b=c=1$.

De manera semejante, se ha visto ya que la gráfica de la función $g(x,y)=\sqrt{16-x^2-y^2}$ es la mitad superior de una esfera, puesto que su ecuación $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$ se corresponde con la ecuación $x^2+y^2+z^2=16$ que, a su vez, es de la forma:

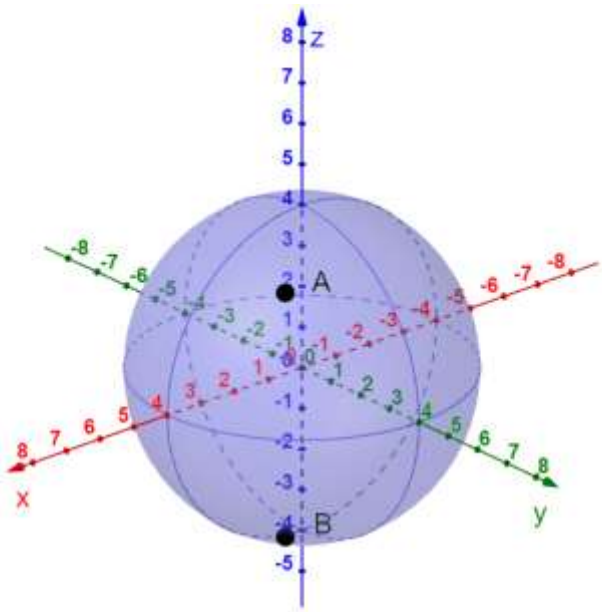
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

Donde su centro es $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$ y $a = b = c = 4$.

Más aún, es importante destacar que una esfera completa no puede representar a la gráfica de una función real de dos variables, puesto que existen una infinidad de pares ordenados (x, y) asociados a dos valores distintos de z tales que la terna (x, y, z) es un punto sobre la superficie; por ejemplo, en el caso de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, dos puntos sobre ésta son $A = (2, \sqrt{3}, 3)$ y $B = (2, \sqrt{3}, -3)$ (ver la figura 1.25), puesto que satisfacen a la ecuación (es decir, $(2)^2 + (\sqrt{3})^2 + (3)^2 = 16$ y $(2)^2 + (\sqrt{3})^2 + (-3)^2 = 16$), de modo que, al par ordenado $(2, \sqrt{3})$ le están correspondiendo dos valores distintos de z, que son $z = 3$ y $z = -3$, lo que contradice a la definición de función, según la cual, a cada par ordenado (x, y) en el dominio de la función le corresponde un único valor $z = f(x, y)$, siempre que f es una función real que depende de las variables x y y.

Exceptuando el caso del paraboloide elíptico, observaciones similares se tienen para las demás superficies cuádricas que, completas, no representan la gráfica de una función.

Figura 1.25 Esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 16$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

Ejercicios Propuestos

En los ejercicios 1 a 13, determina el dominio de cada una de las funciones y establece qué tipo de función es: polinomial, racional, a trozos o ninguna de éstas.

1. $f(x,y) = 6x^4 - 3x^2y + y - 5$.

2. $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

3. $f(x,y) = (xseny, y\cos x)$.

4. $f(x,y,z) = \frac{e^{xy}-z}{x^2+y^2+1}$.

5. $f(x,y) = ln(xy-1)$.

6. $f(x,y) = \frac{y^4-x^4}{x^2+y^2}$.

7. $f(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{x}-2}$.

8. $f(x,y,z) = \left(xy, \frac{1}{xz}, \sqrt{x^2+y^2+z^2}, z-y\right)$.

9. $f(x,y) = \frac{x^9y}{(x^6+y^2)^2}$.

10. $f(x,y,z) = \sqrt{5x^2-3y^2+z^2-49}$.

11. $f(x,y,z) = \frac{sen(xy)+\sqrt{z}}{e^z-1}$.

12. $f(x,y) = \frac{1-xy^2+x^2}{\sqrt{36-x^2-y^2}}$.

13. $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} & si \quad (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & si \quad (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$.

En los ejercicios 14 a 16, realiza lo que se pide a continuación.

a) Traza la gráfica de la función, utilizando la Calculadora Gráfica GeoGebra 3D.

b) Determina analíticamente cada una de las trazas con los planos coordenados; es decir, establece la ecuación de la traza e identifica de qué curva se trata. En caso de no existir la traza debes indicarlo.

c) Muestra la gráfica de cada una de las trazas encontradas en (b), apoyándote con las "herramientas" de la Calculadora Gráfica GeoGebra 3D o con GeoGebra Clásico.

14. $f(x,y) = y^2 - x^2$

15. $g(x,y) = \exp(x^2 + y^2)$

16. $h(x,y) = sen(x+y)$

17. Sean $f(t) = \ln t$ y $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+5$.
a) Encuentra la función compuesta $f \circ g$.
b) Determina el dominio de $f \circ g$.

18. Sean $g(t) = cost$ y $f(x, y) = \frac{1}{x-3y}$.

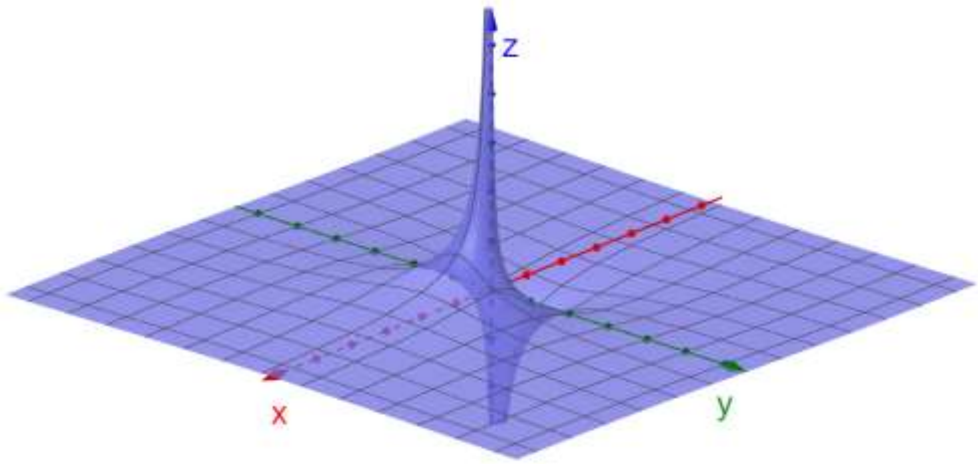
a) Encuentra la función compuesta $g \circ f$.

b) Determina el dominio de $g \circ f$.

19. Expresa el volumen de un paralelepípedo rectangular como una función de sus aristas. En este caso, ¿cuál es el dominio de la función?

20. Expresa el área de un cilindro circular recto como una función de su altura y del radio de su base. En este caso, ¿cuál es el dominio de la función?

Capítulo 2. Límites y Continuidad



2.1 Límites

2.1.1 Introducción: Análisis del límite de una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Con el propósito de explicar de una manera intuitiva el concepto de límite, se analiza una función real de una variable. Considérese la función $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ y el valor $a=-1$. A continuación, se determinará si $f(x)$ se aproxima hacia algún número real, conforme se toman valores de x muy cercanos a -1. Ver la tabla 2.1(a)-(b).

Tabla 2.1(a)-(b) Aproximación de la variable x hacia el valor de -1

(a) Tomando valores $x<-1$

x	$f(x)$
-2	-3
-1.5	-2.5
-1.4	-2.4
-1.3	-2.3
-1.2	-2.2
-1.1	-2.1
-1.01	-2.01
-1.001	-2.001
-1.0001	-2.0001

(b) Tomando valores $x>-1$

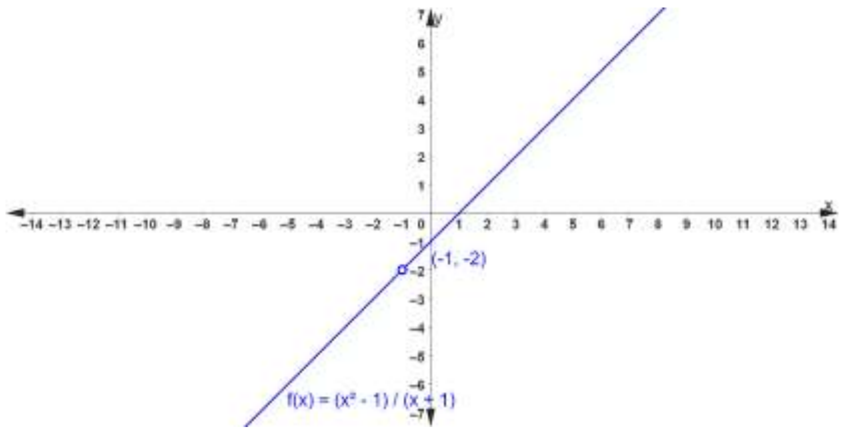
x	$f(x)$
-0.999	-1.999
-0.99	-1.99
-0.9	-1.9
-0.8	-1.8
-0.7	-1.7
-0.6	-1.6
-0.5	-1.5
0	-1
1	0

Fuente: Elaboración Propia

De acuerdo con la tabla 2.1(a)-(b), conforme x se aproxima a -1, tanto por la izquierda (es decir, por valores menores que -1) como por la derecha (es decir, por valores mayores que -1), $f(x)$ se aproxima a -2. Formalmente, se dice que el límite de $f(x)$ conforme x se aproxima o tiende a -1 es -2, y se escribe $\lim_{x\to-1} f(x)=-2$.

Nótese que $f(-1)$ no existe, pero $\lim_{x\to -1} f(x)$ sí existe y vale -2. En general, la existencia del límite no depende de la existencia de la función en el "punto" hacia el cual nos estamos aproximando. Ver la figura 2.1.

Figura 2.1 Gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico

Nótese que el punto $(-1, -2)$ no forma parte de la gráfica de $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$.

Una vez revisado de manera informal el concepto de límite para una función real de una variable, se extenderá la idea intuitiva de límite para funciones de varias variables con valores reales o valores vectoriales.

2.1.2 Idea intuitiva de límite de una función de la forma $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Sean $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cualquier función, $A \in \mathbb{R}^n$ y $L \in \mathbb{R}^m$. Entonces se dice que L es el límite de $f(P)$ cuando P tiende a A si y sólo si $f(P)$ se aproxima a L conforme P se aproxima a A (sin llegar a coincidir P con A), y se escribe $L = \lim_{P\to A} f(P)$, donde $P \neq A$.

Obsérvese que para $n = 1$, P es una variable (la variable independiente), digamos x, entonces $f(P) = f(x)$; en consecuencia, $A \in \mathbb{R}$, digamos $A = a$, por lo que la notación general de límite queda como la notación estudiada en el curso de Cálculo de una Variable; es decir, $\lim_{P\to A} f(P) = \lim_{x\to a} f(x)$, donde $x \to a$ significa que x se acerca al valor de a, pero sin llegar a coincidir con éste ($x \neq a$).

Para $n = 2$, P es un par ordenado, digamos $P = (x, y)$ donde x y y son las variables independientes, entonces $f(P) = f(x, y)$; en consecuencia, $A \in \mathbb{R}^2$, digamos $A = (a, b)$, teniéndose que $\lim_{P\to A} f(P) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$, donde $(x, y) \to (a, b)$ significa que (x, y) se aproxima al punto (a, b), pero sin llegar a coincidir con éste ($(x, y) \neq (a, b)$); es decir, x se acerca al valor de a y y se acerca al valor de b, pero sin llegar a tomar dichos valores ($x \neq a$ y $y \neq b$).

Análogamente, para $n = 3$, P y A son ternas ordenadas de la forma $P = (x, y, z)$ y $A = (a, b, c)$, donde x, y y z son las variables independientes y a, b, c son números reales, resultando $\lim_{P\to A} f(P) = \lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x, y, z)$, donde $(x, y, z) \to (a, b, c)$ significa que las variables x, y, z se aproximan, respectivamente, a los valore de a, b, c, sin llegar a tomar dichos valores, esto es, tal que $x \neq a, y \neq b, z \neq c$.

Por otro lado, para $m = 1$, f es una función de valores reales y, de existir su límite, L, también es un número real; mientras que, para $m > 1$, f es una función de valores vectoriales y su límite L, de existir, es un vector donde el número de coordenadas coincide con el número de funciones componentes de f. Por ejemplo, para $m = 2$, f y L son pares ordenados o vectores de dos coordenadas o componentes de la forma $f(P) = \big(f_1(P), f_2(P)\big)$ y $L = (l_1, l_2)$, donde f_1 y f_2 son las funciones componentes de f y l_1, l_2 son números reales; de este modo:

$\lim\limits_{P \to A} f(P) = L$ es equivalente a $\lim\limits_{P \to A}\big(f_1(P), f_2(P)\big) = (l_1, l_2)$

De manera semejante, para $m = 3$, f y L son ternas ordenadas o vectores de tres coordenadas o componentes de la forma $f(P) = \big(f_1(P), f_2(P), f_3(P)\big)$ y $L = (l_1, l_2, l_3)$, donde f_1, f_2 y f_3 son las funciones componentes de f y l_1, l_2, l_3 son números reales; obteniéndose que:

$\lim\limits_{P \to A} f(P) = L$ es equivalente a $\lim\limits_{P \to A}\big(f_1(P), f_2(P), f_3(P)\big) = (l_1, l_2, l_3)$

2.1.3 Unicidad del límite

Para la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ se ha visto ya que $f(x)$ se aproxima a -2 conforme x se aproxima a -1, tanto por la izquierda como por la derecha; es decir, sus límites laterales existen y son iguales:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -2 = \lim_{x \to -1^+} f(x),$$

donde $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ es su límite lateral izquierdo (se obtiene cuando x se aproxima a -1 por valores menores que -1) y $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ es su límite lateral derecho (se obtiene cuando x se aproxima a -1 por valores mayores que -1). De aquí que, su límite bilateral $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -2$ existe y es único.

Por otro lado, si se considera la función $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ -1 & si \quad x < 0 \end{cases}$ se tiene que su límite lateral izquierdo es:

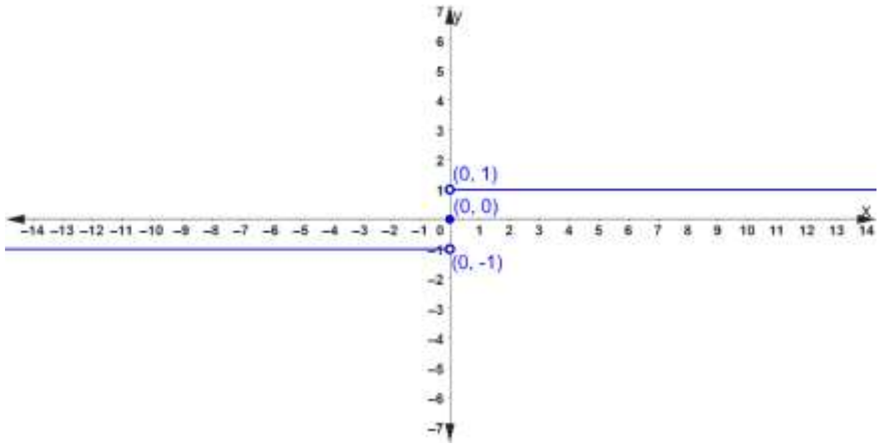
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1,$$

obtenido cuando x se aproxima a 0 por valores menores que 0 (es decir, con $x < 0$); y su límite lateral derecho está dado por:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1,$$

obtenido cuando x se aproxima a 0 por valores mayores que 0 (es decir, con $x > 0$). Luego, aunque los límites laterales existen, como son diferentes, el límite bilateral $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existe. Además, se tiene que $f(0)$ existe y vale 0. Ver la figura 2.2.

Figura 2.2 Gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ -1 & si \quad x < 0 \end{cases}$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico

En general, para cualquier función de una o varias variables que toma valores reales o valores vectoriales, se establece lo siguiente: *Si el límite de una función existe, entonces es único.* En la sección 2.1.6, se aplicará la unicidad del límite para el caso de las funciones reales de dos variables.

En la siguiente sección se estudiarán las propiedades de los límites que corresponden, en su mayoría, a operaciones con funciones.

2.1.4 Propiedades de los límites

Sean $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dos funciones tales que $Domf = Domg$, $A \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{P\to A} f(P) = L_1$ y $\lim\limits_{P\to A} g(P) = L_2$, donde $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^m$, entonces:

(i) $\lim\limits_{P\to A} c = c$.

(ii) $\lim\limits_{x\to a} x = a$, donde x es una variable y a es un número real.

(iii) $\lim\limits_{P\to A} (cf)(P) = cL_1$.

(iv) $\lim\limits_{P\to A} (f+g)(P) = L_1 + L_2$.

(v) $\lim\limits_{P\to A} (f-g)(P) = L_1 - L_2$

(vi) Para $m = 1$: $\lim\limits_{P\to A} (fg)(P) = L_1 L_2$.

(vii) Para $m = 1$ y $L_2 \neq 0$: $\lim\limits_{P\to A} \left(\frac{f}{g}\right)(P) = \frac{L_1}{L_2}$.

(viii) Para $m = 1$: $\lim\limits_{P\to A} [f(P)]^k = (L_1)^k$, donde k es un número entero positivo.

(ix) Para $m = 1$: $\lim\limits_{P\to A} \sqrt[k]{f(P)} = \sqrt[k]{L_1}$, siempre que las raíces indicadas estén definidas.

(x) Para $f(P) = \big(f_1(P), f_2(P), \dots, f_m(P)\big)$ se tiene que $\lim\limits_{P\to A} f(P) = L$, con $L = (l_1, l_2, \dots, l_m) \in \mathbb{R}^m$, si y sólo si $\lim\limits_{P\to A} f_i(P) = l_i$ para todo $i = 1,2, \dots, m$.

La propiedad (i) establece que el límite de una función constante es la misma constante, sin importar si la función depende de una o varias variables. En la propiedad (ii), el límite de una variable al aproximarse ésta a un valor real fijo coincide con dicho valor; es decir, se calcula simplemente evaluando la variable en dicho valor. La propiedad (iii) establece que el límite del múltiplo constante de una función, definido por

$(cf)(P) = cf(P)$ para todo $P \in Domf$,

donde c es la constante, es el límite de la función multiplicado por la constante, siempre que el límite de la función existe. En la propiedad (iv), el límite de la suma de dos funciones, definida por

$(f + g)(P) = f(P) + g(P)$ para todo $P \in Domf = Domg$,

es igual a la suma de los límites de dichas funciones, siempre que estos existen. En la propiedad (v), el límite de la resta de dos funciones, definida por

$(f - g)(P) = f(P) - g(P)$ para todo $P \in Domf = Domg$,

es igual a la resta de los límites de estas funciones, siempre que estos existen.

La propiedad (vi) se establece únicamente para funciones de valores reales, de una o varias variables, de modo que el límite de la multiplicación de dos funciones, definida por

$(fg)(P) = f(P)g(P)$ para todo $P \in Domf = Domg$,

coincide con la multiplicación de los límites de dichas funciones, siempre que estos existen. Análogamente, la propiedad (vii) establece que el límite de la división de funciones reales, de una o varias variables, definida por

$\left(\frac{f}{g}\right)(P) = \frac{f(P)}{g(P)}$ para todo $P \in Domf = Domg$ tal que $g(P) \neq 0$,

coincide con la división de los límites de dichas funciones, siempre que estos existen y el límite del denominador sea distinto de 0. De manera semejante, en las propiedades (viii) y (ix), se establece cómo calcular el límite de la potencia de una función de valores reales y el límite de la raíz de una función de valores reales, respectivamente, siempre que el límite de la función existe y las raíces están definidas. Finalmente, la propiedad (ix) permite calcular el límite de una función con valores vectoriales, de una o varias variables, aplicando el límite a cada una de sus funciones componentes, siempre que estos existen. En particular, la propiedad (iv) se puede generalizar para cuando se suman más de dos funciones; así mismo, la propiedad (vi) se cumple para cuando se multiplican más de dos funciones. También se puede extender la propiedad (ii), para funciones $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, del siguiente modo:

$\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$ y $\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$

De manera análoga, la propiedad (ii) para funciones $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ queda como se muestra a continuación:

$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} x = a$, $\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} y = b$ y $\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} z = c$

Las propiedades (i) a (x) enunciadas anteriormente permiten calcular el límite de una función por *sustitución directa*; es decir, evaluando las variables en los respectivos valores hacia los cuales se aproximan.

2.1.5 Ejemplos de resolución de límites

Calcula los siguientes límites usando las propiedades 2.1.4, siempre que sea posible.

1. $\lim_{x\to -2}\sqrt{5}$
2. $\lim_{x\to \pi} x$
3. $\lim_{x\to -1} x^2+2x-3$
4. $\lim_{x\to -3}(2x+1)(x-7)$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x+2}$
6. $\lim_{(x,y)\to(2,3)} 5x^2+3xy-2y^2-1$
7. $\lim_{(x,y)\to(-1,1)}(2xy-3)(x-y)$
8. $\lim_{(x,y)\to(-1,2)}\frac{xy}{x^2+y^2+1}$
9. $\lim_{(x,y,z)\to(1,-4,3)}(\pi x^3+y^3-2z^2)$
10. $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$
11. $\lim_{(x,y)\to(-1,1)}\frac{y^2-x^2}{x+y}$
12. $\lim_{(x,y)\to(3,-1)}\frac{2x^2+5xy-3y^2}{x^2+2xy-3y^2}$
13. $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$
14. $\lim_{(x,y)\to(4,1)}\frac{y(x-4)}{\sqrt{x}-2}$
15. $\lim_{(x,y)\to(5,2)}\frac{\sqrt{x-y-2}-1}{x-y-3}$
16. $\lim_{(x,y,z)\to(-1,0,1)}\left(xy,\frac{1}{xz},\sqrt{x^2+y^2+z^2},z-y\right)$

Solución:

1. $\lim_{x\to -2}\sqrt{5}$

Por la propiedad (i):

$$\lim_{x\to -2}\sqrt{5}=\sqrt{5}.$$

Donde la función a la que se le calculó el límite es la función de tipo constante $f(x)=\sqrt{5}$.

Es importante destacar que, si la función se cambia por $f(x,y)=\sqrt{5}$ y (x,y) tiende hacia cualquier par ordenado $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, el valor del límite es siempre igual a $\sqrt{5}$, debido a la propiedad (i); es decir:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

En particular, si (x,y) tiende hacia $(-2,3)$, se tiene que:

$$\lim_{(x,y)\to(-2,3)}\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

Además, esta situación se preserva aun cuando la función constante dependa de tres o más variables.

2. $\lim_{x \to \pi} x$

Por la propiedad (ii):

$$\lim_{x \to \pi} x = \pi$$

Donde la función a la que se le calculó el límite es la función identidad $f(x) = x$.

Si la función se considera ahora de dos variables, de modo que $f(x, y) = x$, y (x, y) se hace tender hacia cualquier par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, el valor del límite coincide con el valor de a, esto es, coincide con el valor hacia el cual se acerca la variable x, debido a la propiedad (ii); es decir: $\lim_{(x,y) \to (a,b)} x = a$

En particular, si (x, y) tiende hacia $(\pi, 3\pi)$, se tiene que:

$$\lim_{(x,y) \to (\pi,3\pi)} x = \pi$$

Por otro lado, si la función es $f(x, y) = y$ y (x, y) tiende hacia cualquier par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, el valor del límite es igual a b, esto es:

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} y = b$$

De aquí que:

$$\lim_{(x,y) \to (\pi,3\pi)} y = 3\pi$$

La propiedad (ii) se puede generalizar para cuando la función real de una o más variables está definida como una de las variables de las que depende, tal como se mostró en este ejemplo.

3. $\lim_{x \to -1} x^2 + 2x - 3$

En este caso, la función cuyo límite se va a calcular es una función $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de tipo polinomial, definida por $p(x) = x^2 + 2x - 3$, de modo que se puede considerar como la suma de las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$ y $h(x) = -3$; es decir:

$$p(x) = f(x) + g(x) + h(x) = (f + g + h)(x)$$

Por lo que es necesario aplicar la propiedad (iv), para obtener:

$$\lim_{x \to -1} (f + g + h)(x) = \lim_{x \to -1} f(x) + \lim_{x \to -1} g(x) + \lim_{x \to -1} h(x)$$

O bien:

$$\lim_{x \to -1} x^2 + 2x - 3 = \lim_{x \to -1} x^2 + \lim_{x \to -1} 2x + \lim_{x \to -1} (-3)$$

Donde, por las propiedades (i), (ii), (iii) y (viii), se tiene que:

$$\lim_{x \to -1} x^2 = \left(\lim_{x \to -1} x\right)^2 \textit{ por la propiedad (viii)}$$

$$= (-1)^2 \textit{ por la propiedad (ii)}$$

$$= 1$$

$\lim\limits_{x \to -1} 2x = 2\left(\lim\limits_{x \to -1} x\right)$ *por la propiedad (iii)*

$= 2(-1)$ *por la propiedad (ii)*

$= -2$

$\lim\limits_{x \to -1} (-3) = -3$ *por la propiedad (i)*

De este modo:

$\lim\limits_{x \to -1} x^2 + 2x - 3 = \lim\limits_{x \to -1} x^2 + \lim\limits_{x \to -1} 2x + \lim\limits_{x \to -1} (-3)$

$= 1 + (-2) + (-3)$

$= -4.$

Es importante observar que el cálculo de este límite equivale a reemplazar la variable x por el valor hacia el cual se está aproximando, que en este caso es -1, como se muestra a continuación:

$\lim\limits_{x \to -1} x^2 + 2x - 3 = (-1)^2 + 2(-1) - 3$

$= 1 - 2 - 3$

$= -4.$

Este método se conoce como *sustitución directa* y queda completamente justificado por las propiedades 2.1.4.

4. $\lim\limits_{x \to -3} (2x + 1)(x - 7)$

La función cuyo límite se va a calcular es una función $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de tipo polinomial, definida por $p(x) = (2x + 1)(x - 7)$, tal que se puede considerar como la multiplicación de las funciones $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x - 7$; es decir:

$p(x) = f(x)g(x) = (fg)(x)$

Luego, por la propiedad (vi):

$\lim\limits_{x \to -3} (fg)(x) = \left[\lim\limits_{x \to -3} f(x)\right]\left[\lim\limits_{x \to -3} g(x)\right]$

O bien:

$\lim\limits_{x \to -3} (2x + 1)(x - 7) = \left[\lim\limits_{x \to -3} (2x + 1)\right]\left[\lim\limits_{x \to -3} (x - 7)\right]$

Donde, por las propiedades (i) a (v):

$\lim\limits_{x \to -3} (2x + 1) = \lim\limits_{x \to -3} 2x + \lim\limits_{x \to -3} 1$ *por la propiedad (iv)*

$= 2(-3) + 1$ *por las propiedades (iii), (ii) y (i)*

$= -5$

$\lim_{x\to-3}(x-7) = \lim_{x\to-3} x - \lim_{x\to-3} 7$ *por la propiedad (v)*

$= -3 - 7$ *por las propiedades (ii) y (i)*

$= -10$

De aquí que:

$$\lim_{x\to-3}(2x+1)(x-7) = \left[\lim_{x\to-3}(2x+1)\right]\left[\lim_{x\to-3}(x-7)\right]$$

$= (-5)(-10)$

$= 50$

Equivalentemente, por sustitución directa:

$$\lim_{x\to-3}(2x+1)(x-7) = [2(-3)+1][-3-7]$$

$= (-5)(-10)$

$= 50$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x+2}$

La función cuyo límite se va a calcular es una función $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de tipo racional, definida por $q(x) = \frac{x-1}{x+2}$, que se puede considerar como la división de las funciones $f(x) = x - 1$ y $g(x) = x + 2$; esto es:

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

Por la propiedad (vii):

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to 0} f(x)}{\lim_{x\to 0} g(x)}$$

O bien:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x+2} = \frac{\lim_{x\to 0}(x-1)}{\lim_{x\to 0}(x+2)}$$

Donde, por las propiedades (i), (ii), (iv) y (v):

$\lim_{x\to 0}(x-1) = \lim_{x\to 0} x - \lim_{x\to 0} 1$ *por la propiedad (v)*

$= 0 - 1$ *por las propiedades (ii) y (i)*

$= -1$

$\lim_{x\to 0}(x+2) = \lim_{x\to 0} x + \lim_{x\to 0} 2$ *por la propiedad (iv)*

$= 0 + 2$ *por las propiedades (ii) y (i)*

$= 2$

De este modo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 0}(x+2)}=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$$

Equivalentemente, por sustitución directa:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x+2}=\frac{0-1}{0+2}=-\frac{1}{2}$$

Es importante enfatizar que para poder aplicar la propiedad (vii) se requiere no sólo que el límite de la función numerador y el límite de la función denominador existan, sino también que el límite de la función denominador sea distinto de 0.

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} 5x^2+3xy-2y^2-1$

Ahora, la función cuyo límite se va a calcular es una función $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de tipo polinomial, definida por $p(x,y)=5x^2+3xy-2y^2-1$, que se puede considerar como la suma de las funciones $f(x,y)=5x^2$, $g(x,y)=3xy$, $h(x,y)=-2y^2$ e $i(x,y)=-1$; esto es:

$$p(x,y)=f(x,y)+g(x,y)+h(x,y)+i(x,y)=(f+g+h+i)(x,y)$$

Por la propiedad (iv):

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)}(f+g+h+i)(x,y)$$

$$=\lim_{(x,y)\to(2,3)}f(x,y)+\lim_{(x,y)\to(2,3)}g(x,y)+\lim_{(x,y)\to(2,3)}h(x,y)+\lim_{(x,y)\to(2,3)}i(x,y)$$

O bien:

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)}5x^2+3xy-2y^2-1$$

$$=\lim_{(x,y)\to(2,3)}5x^2+\lim_{(x,y)\to(2,3)}3xy+\lim_{(x,y)\to(2,3)}(-2y^2)+\lim_{(x,y)\to(2,3)}(-1)$$

Donde, por las propiedades (i), (ii), (iii), (vi) y (viii), se tiene que:

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)}5x^2=5\left[\lim_{(x,y)\to(2,3)}x^2\right] \textit{ por la propiedad (iii)}$$

$$=5\left[\lim_{(x,y)\to(2,3)}x\right]^2 \textit{ por la propiedad (viii)}$$

$$=5(2)^2 \textit{ por la propiedad (ii)}$$

$$=20$$

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)}3xy=3\left[\lim_{(x,y)\to(2,3)}xy\right] \textit{ por la propiedad (iii)}$$

$$=3\left[\lim_{(x,y)\to(2,3)}x\right]\left[\lim_{(x,y)\to(2,3)}y\right] \textit{ por la propiedad (vi)}$$

$$=3(2)(3) \textit{ por la propiedad (ii)}$$

$$=18$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)}(-2y^2) = -2\left[\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} y^2\right]$ *por la propiedad (iii)*

$= -2\left[\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} y\right]^2$ *por la propiedad (viii)*

$= -2(3)^2$ *por la propiedad (ii)*

$= -18$

$\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)}(-1) = -1$ *por la propiedad (i)*

De aquí que:

$\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} 5x^2 + 3xy - 2y^2 - 1$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} 5x^2 + \lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} 3xy + \lim\limits_{(x,y)\to(2,3)}(-2y^2) + \lim\limits_{(x,y)\to(2,3)}(-1)$

$= 20 + 18 + (-18) + (-1)$

$= 19$

Equivalentemente, por sustitución directa:

$\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} 5x^2 + 3xy - 2y^2 - 1 = 5(2)^2 + 3(2)(3) - 2(3)^2 - 1$

$= 20 + 18 - 18 - 1$

$= 19$

Nótese que, en la sustitución directa, bastó con reemplazar la variable x por 2 y la variable y por 3, pero que esto es posible gracias a las propiedades 2.1.4.

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)}(2xy - 3)(x - y)$

La función cuyo límite se va a calcular es, nuevamente, una función $p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de tipo polinomial, definida por $p(x,y) = (2xy - 3)(x - y)$, de modo que se puede considerar como la multiplicación de las funciones $f(x,y) = 2xy - 3$ y $g(x,y) = x - y$; es decir:

$p(x,y) = f(x,y)g(x,y) = (fg)(x,y)$

Luego, por la propiedad (vi):

$\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)}(fg)(x,y) = \left[\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} f(x,y)\right]\left[\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} g(x,y)\right]$

O bien:

$\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)}(2xy - 3)(x - y) = \left[\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)}(2xy - 3)\right]\left[\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)}(x - y)\right]$

Donde, por las propiedades (i), (ii), (iii), (v) y (vi):

$\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)}(2xy - 3) = \lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} 2xy - \lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} 3$ *por la propiedad (v)*

$= 2(-1)(1) - 3$ *por las propiedades (iii), (vi), (ii) y (i)*

$= -5$

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)}(x-y) = \lim_{(x,y)\to(-1,1)} x - \lim_{(x,y)\to(-1,1)} y \text{ } \textit{por la propiedad (v)}$$

$$= -1 - 1 \text{ } \textit{por la propiedad (ii)}$$

$$= -2$$

De este modo:

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)}(2xy-3)(x-y) = \left[\lim_{(x,y)\to(-1,1)}(2xy-3)\right]\left[\lim_{(x,y)\to(-1,1)}(x-y)\right]$$

$$= (-5)(-2)$$

$$= 10$$

Equivalentemente, por sustitución directa:

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)}(2xy-3)(x-y) = [2(-1)(1)-3][-1-1]$$

$$= (-5)(-2)$$

$$= 10.$$

Nótese que, en la sustitución directa, bastó con reemplazar la variable x por -1 y la variable y por 1, siendo posible por las propiedades 2.1.4.

8. $\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{xy}{x^2+y^2+1}$

La función cuyo límite se va a calcular ahora es una función $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de tipo racional, definida por $q(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2+1}$, que se puede considerar como la división de las funciones $f(x,y) = xy$ y $g(x,y) = x^2 + y^2 + 1$; esto es:

$$q(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x,y)$$

Por la propiedad (vii):

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)}\left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \frac{\lim_{(x,y)\to(-1,2)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(-1,2)} g(x,y)}$$

O bien:

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{xy}{x^2+y^2+1} = \frac{\lim_{(x,y)\to(-1,2)} xy}{\lim_{(x,y)\to(-1,2)}(x^2+y^2+1)}$$

Donde, por las propiedades (i), (ii), (iv), (vi) y (viii):

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} xy = \left[\lim_{(x,y)\to(-1,2)} x\right]\left[\lim_{(x,y)\to(-1,2)} y\right] \text{ } \textit{por la propiedad (vi)}$$

$$= (-1)(2) \text{ } \textit{por la propiedad (ii)}$$

$$= -2$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)}(x^2+y^2+1) = \lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} x^2 + \lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} y^2 + \lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} 1$ *por la propiedad (iv)*

$= (-1)^2 + (2)^2 + 1$ *por las propiedades (viii), (ii) y (i)*

$= 6$

De este modo:

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{xy}{x^2+y^2+1} = \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} xy}{\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} (x^2+y^2+1)} = \frac{-2}{6} = \frac{1}{3}$$

Equivalentemente, por sustitución directa:

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{xy}{x^2+y^2+1} = \frac{(-1)(2)}{(-1)^2+(2)^2+1} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Nótese que, en la sustitución directa, bastó con reemplazar la variable x por -1 y la variable y por 2, siendo posible por las propiedades 2.1.4.

9. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,-4,3)}(\pi x^3 + y^3 - 2z^2)$

Por sustitución directa:

$\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,-4,3)}(\pi x^3 + y^3 - 2z^2) = \pi(1)^3 + (-4)^3 - 2(3)^2$

$= \pi - 64 - 18$

$= \pi - 82$

≈ -78.85

Donde la función a la que se le calculó el límite es una función $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, polinomial, definida por $f(x,y,z) = \pi x^3 + y^3 - 2z^2$.

10. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$

Si se define $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$, al evaluar la función f en 3 se tiene lo siguiente:

$$f(3) = \frac{3-3}{(3)^2-9} = \frac{0}{9-9} = \frac{0}{0}$$

Donde la expresión $\frac{0}{0}$ no es un número real, más aún, se dice que es una indeterminación; por lo que no es aplicable la sustitución directa para el cálculo del límite indicado. En este caso, lo que conviene es factorizar el denominador de la fracción, como se muestra a continuación:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)}$$

Como tanto en el numerador como en el denominador de la fracción aparece la expresión $x-3$ (como factor), se procede a simplificar (cancelar los factores iguales en el numerador y denominador), quedando lo siguiente:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x+3}$$

Donde este último límite ya es posible calcularlo por sustitución directa, de modo que:

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

Es decir, el límite $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$ existe y vale $\frac{1}{6}$, lo cual se determinó aplicando el *método de factorización*.

Resumiendo, el cálculo del límite se lleva a cabo de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)}$$
factorizando el denominador: $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{1}{x+3}$$
simplificando la fracción

$$= \frac{1}{3+3}$$
calculando el límite por sustitución directa, con $x = 3$

$$= \frac{1}{6}$$

Es importante notar que, en este ejemplo, el valor del límite no se obtuvo desde un principio por sustitución directa debido a que el denominador de la fracción se anula (toma el valor de 0) en $x = 3$; en otras palabras, no es posible aplicar la propiedad (vii) y calcular el límite de la división como la división de los límites, porque el límite del denominador tomó el valor de 0.

11. $\lim_{(x,y) \to (-1,1)} \frac{y^2-x^2}{x+y}$

Si se define $f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{x+y}$, al evaluar la función f en $(-1,1)$ se obtiene una indeterminación:

$$f(-1,1) = \frac{(1)^2-(-1)^2}{-1+1} = \frac{0}{0}$$

No obstante, por el método de factorización se tiene que:

$$\lim_{(x,y) \to (-1,1)} \frac{y^2-x^2}{x+y} = \lim_{(x,y) \to (-1,1)} \frac{(y-x)(y+x)}{x+y}$$
factorizando el numerador: $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$

$$= \lim_{(x,y) \to (-1,1)} (y-x)$$
simplificando la fracción, pues $y + x = x + y$

$$= 1 - (-1)$$
por sustitución directa, con $x = -1$, $y = 1$

$$= 2$$

Es decir, el límite $\lim_{(x,y) \to (-1,1)} \frac{y^2-x^2}{x+y}$ existe y vale 2. En este ejemplo, nuevamente, el valor del límite no se obtuvo desde un principio por sustitución directa debido a que el denominador de la fracción se anula en $(x,y) = (-1,1)$.

12. $\lim_{(x,y)\to(3,-1)} \frac{2x^2+5xy-3y^2}{x^2+2xy-3y^2}$

Si se define $f(x,y) = \frac{2x^2+5xy-3y^2}{x^2+2xy-3y^2}$, al evaluar la función f en $(3,-1)$ se obtiene una indeterminación:

$$f(3,-1) = \frac{2(3)^2+5(3)(-1)-3(-1)^2}{(3)^2+2(3)(-1)-3(-1)^2} = \frac{18-15-3}{9-6-3} = \frac{0}{0}$$

que, como ya se vio en los ejemplos 10 y 11, no significa que el límite no existe. Se procede ahora a aplicar el método de factorización:

$$\lim_{(x,y)\to(3,-1)} \frac{2x^2+5xy-3y^2}{x^2+2xy-3y^2} = \lim_{(x,y)\to(3,-1)} \frac{(2x-y)(x+3y)}{(x-y)(x+3y)}$$

factorizando numerador y denominador

$$= \lim_{(x,y)\to(3,-1)} \frac{2x-y}{x-y}$$

simplificando la fracción

$$= \frac{2(3)-(-1)}{3-(-1)}$$

por sustitución directa, con $x = 3, y = -1$

$$= \frac{7}{4}$$

Por lo tanto, el límite $\lim_{(x,y)\to(3,-1)} \frac{2x^2+5xy-3y^2}{x^2+2xy-3y^2}$ existe y vale $\frac{7}{4}$ por el método de factorización.

13. $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

Si se define $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$, al evaluar la función f en 4 se obtiene una indeterminación:

$$f(4) = \frac{\sqrt{4}-2}{4-4} = \frac{2-2}{0} = \frac{0}{0}$$

razón por la cual no es posible calcular el límite indicado por sustitución directa. En este caso lo que conviene es racionalizar, como se muestra a continuación:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\right)$$

donde se multiplicó tanto el numerador como el denominador de la función $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ por el “conjugado” del numerador que, en esta ocasión, es el que contiene a la expresión con la raíz cuadrada. Luego, el producto de fracciones se efectúa de la siguiente manera:

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

Donde en la multiplicación del numerador se aplicó lo siguiente:

$$(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2) = (\sqrt{x})^2 - (2)^2 = x-4$$

Como en la última fracción aparece la expresión $x-4$, tanto en el numerador como en el denominador, se procede a simplificar, quedando lo siguiente:

$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

Retomando el cálculo del límite, se tiene que:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

Donde este último límite ya es posible calcularlo por sustitución directa, de modo que:

$$\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

Es decir, el límite $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ existe y vale $\frac{1}{4}$, lo cual se determinó por el *método de racionalización*.

Resumiendo, el cálculo del límite se lleva a cabo de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\right)$$
racionalizando la función $f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$
efectuando la multiplicación de fracciones, donde: $(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)=(\sqrt{x})^2-(2)^2=x-4$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}$$
simplificando la fracción

$$=\frac{1}{\sqrt{4}+2}$$
calculando el límite por sustitución directa, con $x=4$

$$=\frac{1}{4}$$

En este ejemplo, el valor del límite no se obtuvo desde un principio por sustitución directa debido a que el denominador de la fracción se anula en $x=4$.

14. $\lim_{(x,y)\to(4,1)}\frac{y(x-4)}{\sqrt{x}-2}$

No es aplicable la sustitución directa, en virtud de que:

$$f(4,1)=\frac{1(4-4)}{\sqrt{4}-2}=\frac{0}{2-2}=\frac{0}{0}$$

para $f(x,y)=\frac{y(x-4)}{\sqrt{x}-2}$; sin embargo, por el método de racionalización:

$$\lim_{(x,y)\to(4,1)}\frac{y(x-4)}{\sqrt{x}-2}=\lim_{(x,y)\to(4,1)}\left(\frac{y(x-4)}{\sqrt{x}-2}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\right)$$
racionalizando la función $f(x,y)=\frac{y(x-4)}{\sqrt{x}-2}$

$$=\lim_{(x,y)\to(4,1)}\frac{y(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}$$
efectuando la multiplicación de fracciones, donde: $(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)=(\sqrt{x})^2-(2)^2=x-4$

$$=\lim_{(x,y)\to(4,1)}y(\sqrt{x}+2)$$
simplificando la fracción

$= 1\left(\sqrt{4} + 2\right)$
por sustitución directa, *con* $x = 4, y = 1$

$= 4$

Es decir, el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(4,1)} \frac{y(x-4)}{\sqrt{x}-2}$ existe y vale 4. En este ejemplo, nuevamente, el valor del límite no se obtuvo desde un principio por sustitución directa debido a que el denominador de la fracción se anula en $(x, y) = (4,1)$.

15. $\lim\limits_{(x,y)\to(5,2)} \frac{\sqrt{x-y-2}-1}{x-y-3}$

Nuevamente, para $f(x, y) = \frac{\sqrt{x-y-2}-1}{x-y-3}$ no es aplicable la sustitución directa, en virtud de que:

$f(5,2) = \frac{\sqrt{5-2-2}-1}{5-2-3} = \frac{1-1}{5-5} = \frac{0}{0}$

es decir, se llega a una indeterminación que, como ya se vio en los ejemplos 13 y 14, no significa que el límite no existe. Se procede ahora a aplicar el método de racionalización:

$\lim\limits_{(x,y)\to(5,2)} \frac{\sqrt{x-y-2}-1}{x-y-3} = \lim\limits_{(x,y)\to(5,2)} \left(\frac{\sqrt{x-y-2}-1}{x-y-3}\right)\left(\frac{\sqrt{x-y-2}+1}{\sqrt{x-y-2}+1}\right)$
racionalizando la función $f(x, y) = \frac{\sqrt{x-y-2}-1}{x-y-3}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(5,2)} \frac{x - y - 3}{(x - y - 3)\left(\sqrt{x - y - 2} + 1\right)}$

efectuando la multiplicación de fracciones, donde:

$\left(\sqrt{x - y - 2} - 1\right)\left(\sqrt{x - y - 2} + 1\right) = \left(\sqrt{x - y - 2}\right)^2 - (1)^2 \;\; = x - y - 2 - 1 \;\; = x - y - 3$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(5,2)} \frac{1}{\sqrt{x-y-2}+1}$

simplificando la fracción

$= \frac{1}{\sqrt{5-2-2}+1}$
por sustitución directa, *con* $x = 5, y = 2$

$= \frac{1}{2}$

Por lo tanto, el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(5,2)} \frac{\sqrt{x-y-2}-1}{x-y-3}$ existe y vale $\frac{1}{2}$, por el método de racionalización.

16. $\lim_{(x,y,z)\to(-1,0,1)} \left(xy, \frac{1}{xz}, \sqrt{x^2+y^2+z^2}, z-y\right)$

En este caso, la sustitución directa es posible por la propiedad (x), entre otras propiedades, y el límite se calcula como se indica a continuación:

$$\lim_{(x,y,z)\to(-1,0,1)} \left(xy, \frac{1}{xz}, \sqrt{x^2+y^2+z^2}, z-y\right)$$

$$= \left((-1)(0), \frac{1}{(-1)(1)}, \sqrt{(-1)^2+(0)^2+(1)^2}, 1-0\right)$$

$$= \left(0, -1, \sqrt{2}, 1\right).$$

Donde se identifica a la función $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x,y,z) = \left(xy, \frac{1}{xz}, \sqrt{x^2+y^2+z^2}, z-y\right),$$

cuyas funciones componentes son:

$$f_1(x,y,z) = xy$$

$$f_2(x,y,z) = \frac{1}{xz}$$

$$f_3(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$f_4(x,y,z) = z-y.$$

Además:

$$\lim_{(x,y,z)\to(-1,0,1)} f_1(x,y,z) = \lim_{(x,y,z)\to(-1,0,1)} xy$$

$= (-1)(0)$ *por las propiedades (vi) y (ii)*

$= 0$

$$\lim_{(x,y,z)\to(-1,0,1)} f_2(x,y,z) = \lim_{(x,y,z)\to(-1,0,1)} \frac{1}{xz}$$

$= \frac{1}{(-1)(1)}$ *por las propiedades (vii), (i) y (ii)*

$= -1$

$$\lim_{(x,y,z)\to(-1,0,1)} f_3(x,y,z) = \lim_{(x,y,z)\to(-1,0,1)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$= \sqrt{(-1)^2+(0)^2+(1)^2}$ *por las propiedades (ix), (iv), (viii) y (ii)*

$= \sqrt{2}$

$$\lim_{(x,y,z)\to(-1,0,1)} f_4(x,y,z) = \lim_{(x,y,z)\to(-1,0,1)} z-y$$

$= 1-0$ *por las propiedades (v) y (ii)*

$= 1$

Nótese que en cada uno de los incisos analizados en la sección 2.1.5, el límite sí existe.

2.1.6 Límites direccionales de funciones $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Para funciones reales de una sola variable real, la existencia del límite depende de que ambos límites laterales, izquierdo y derecho, existan y sean iguales; es decir, tomen el mismo valor real. Por otro lado, para funciones reales de dos variables no tiene sentido hablar de límites laterales, por lo que este concepto se reemplaza por el de *límites direccionales*, en virtud de que existe una infinidad de caminos o trayectorias que permiten acercarnos al punto en cuestión, a través de rectas o curvas que pasen por dicho punto. (Vera, 2005).

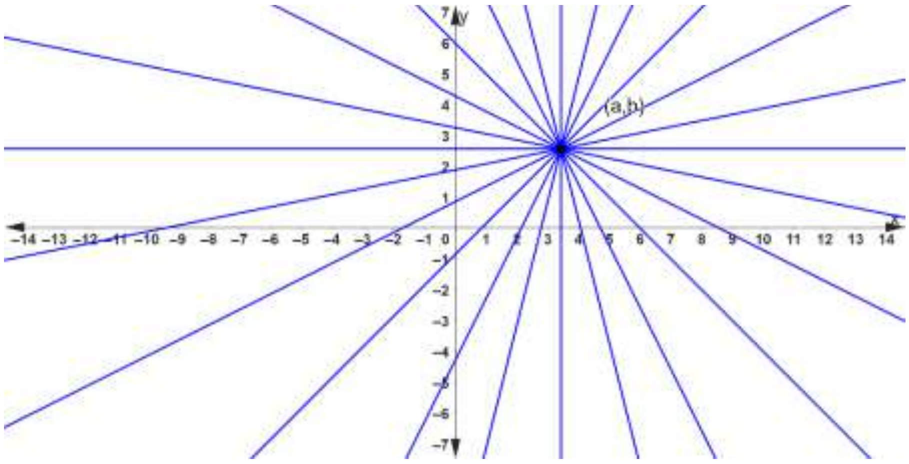
En otras palabras, para funciones de la forma $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, en la notación de límite dada por $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$, tener $(x,y) \to (a,b)$ significa que los pares ordenados (x,y) se pueden aproximar al punto (a,b) en cualquier dirección, por trayectorias rectas o curvas que pasen por el punto (a,b). Más aún, para que el límite $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ exista, se requiere que al aproximar (x,y) al punto (a,b), por todas las posibles direcciones, los valores de la función $f(x,y)$ se aproximen a un mismo valor real, puesto que el valor del límite es único; es decir, todos los límites direccionales deben existir y ser iguales. En consecuencia, si alguno de los límites direccionales no existe, o bien, dos o más límites direccionales existen, pero no coinciden, entonces se dice que el límite $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ no existe.

En la práctica, se utilizan los límites direccionales cuando los métodos de factorización y racionalización no son aplicables para calcular el límite de una función racional que, al evaluarla en el punto dado, resulta en una indeterminación, esto es: $f(a,b) = \frac{0}{0}$. Además, se acostumbra a aproximar los pares ordenados (x,y) al punto (a,b) por rectas o curvas adecuadas, dependiendo del grado de las variables que aparecen en el denominador de la función; por ejemplo, se usan rectas cuando las variables del denominador son del mismo grado y parábolas cuando el grado de una de las variables es el doble del grado de la otra variable.

En cualquiera de los casos, se debe recordar que la trayectoria, sea recta o curva, debe pasar por el punto en cuestión. En el caso de las rectas que pasan por el punto (a,b), es útil recordar que su ecuación en su forma punto – pendiente es $y - b = m(x - a)$, donde m es la pendiente de la recta (ver la figura 2.3). En el caso de parábolas con vértice en el punto (a,b), si éstas son verticales su ecuación es de la forma $(x-a)^2 = c(y-b)$, mientras que, si éstas son horizontales, su ecuación es de la forma $(y-b)^2 = c(x-a)$, donde c es una constante (ver la figura 2.4(a)-(b)).

También se debe tener presente que el método de los límites direccionales sólo permite concluir sobre la no existencia de un límite, en aquellos casos donde es posible determinar dos o más trayectorias por las cuales el valor de los respectivos límites direccionales no coincide. En contraste, este método no garantiza la existencia del límite, debido a que, aun cuando todos los límites direccionales que consideremos tomen el mismo valor real, es posible que exista una trayectoria diferente a las contempladas para la cual el valor del límite direccional ya no sea el mismo; lo más que se puede concluir cuando por varias trayectorias diferentes sus respectivos límites direccionales existen y son iguales es que, de existir el límite, su valor debe coincidir con el de los límites direccionales calculados.

Figura 2.3 Rectas que pasan por el punto (a, b), de ecuación: $y - b = m(x - a)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico

Figura 2.4(a) Parábolas verticales con vértice en el punto (a, b), de ecuación:
$(x - a)^2 = c(y - b)$

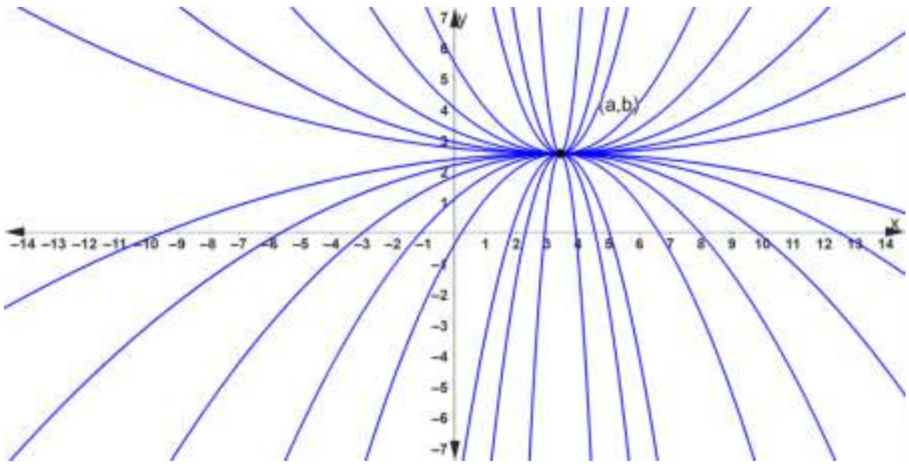
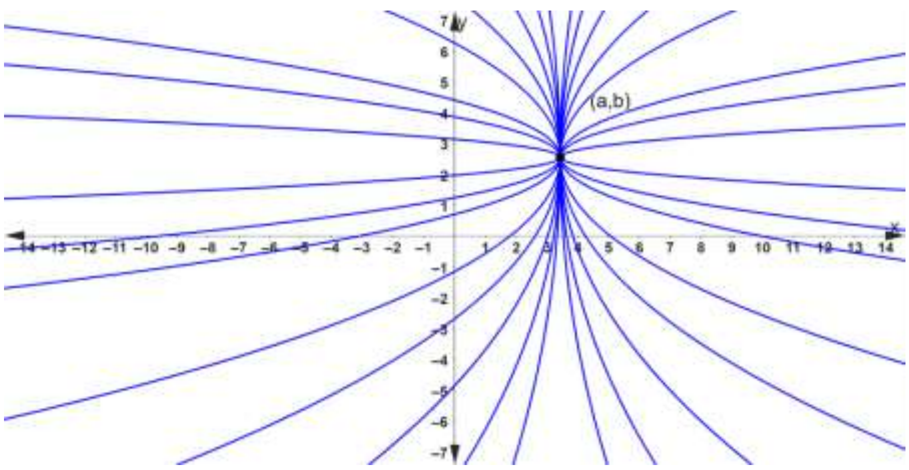


Figura 2.4(b) Parábolas horizontales con vértice en el punto (a, b), de ecuación:
$(y - b)^2 = c(x - a)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico

Ejemplos

1. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$. Determina si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe. (Adaptado a partir de Larson *et. al.*, 1996, p. 1125).

Solución:

No es aplicable la sustitución directa, puesto que al evaluar la función f en $(0,0)$ se tiene que:

$$f(0,0) = \frac{(0)^3 + (0)^3}{(0)^2 + (0)^2} = \frac{0}{0}$$

es decir, se llega a una indeterminación, lo que no significa que el límite no existe. No son aplicables los métodos de factorización y racionalización, aun cuando el numerador se puede factorizar como una suma de cubos, dicha descomposición no conlleva a una simplificación que permita calcular el límite por el método de factorización. En efecto:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{x^2 + y^2}$$

factorizando el numerador

donde en la última fracción notamos que no aparecen factores iguales en numerador y denominador, resultando imposible la simplificación de la función.

Calculando ahora límites direccionales, se procede a aproximar (x,y) al punto $(0,0)$ por diferentes trayectorias que pasan por $(0,0)$, como se muestra a continuación.

Por el eje x ($y = 0$):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) \textit{ sustituyendo } y = 0$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3+(0)^3}{x^2+(0)^2} \textit{ evaluando } f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \textit{ en } (x,0)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} \textit{ efectuando operaciones en numerador y denominador}$$

$$= \lim_{x\to 0} x \textit{ simplificando la fracción}$$

$$= 0 \textit{ por la propiedad 2.1.4(ii)}$$

Por el eje y ($x = 0$):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) \textit{ sustituyendo } x = 0$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{(0)^3+y^3}{(0)^2+y^2} \textit{ evaluando } f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \textit{ en } (0,y)$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{y^2} \textit{ efectuando operaciones en numerador y denominador}$$

$$= \lim_{y\to 0} y \textit{ simplificando la fracción}$$

$= 0$ *por la propiedad 2.1.4(ii)*

Por la recta identidad $y = x$:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x)$ *sustituyendo* $y = x$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^3}{x^2+x^2}$ *evaluando* $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ *en* (x,x)

$= \lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{2x^2}$ *efectuando operaciones en numerador y denominador*

$= \lim_{x\to 0} x$ *simplificando la fracción*

$= 0$ *por la propiedad 2.1.4(ii)*

Aproximando (x,y) a $(0,0)$ por cualquier recta de pendiente m que pase por el origen, $y = mx$, se tiene:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx)$ *sustituyendo* $y = mx$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3+(mx)^3}{x^2+(mx)^2}$ *evaluando* $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ *en* (x,mx)

$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3+m^3x^3}{x^2+m^2x^2}$ *efectuando las potencias*

$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3(1+m^3)}{x^2(1+m^2)}$ *factorizando numerador y denominador*

$= \lim_{x\to 0} \frac{x(1+m^3)}{(1+m^2)}$ *simplificando la fracción*

$= \frac{(1+m^3)}{(1+m^2)} \lim_{x\to 0} x$ *por la propiedad 2.1.4(iii)*

$= 0$ *por la propiedad 2.1.4(ii)*

Aproximando (x,y) a $(0,0)$ por cualquier parábola con vértice en el origen $y = ax^2$, con $a \neq 0$, se tiene:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,ax^2)$ *sustituyendo* $y = ax^2$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3+(ax^2)^3}{x^2+(ax^2)^2}$ *evaluando* $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ *en* (x,ax^2)

$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3+a^3x^6}{x^2+a^2x^4}$ *efectuando las potencias*

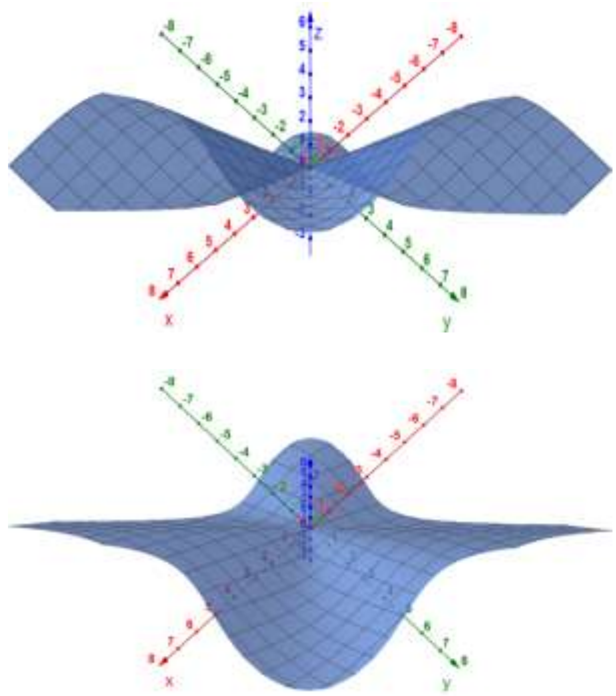
$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3(1+a^3x^3)}{x^2(1+a^2x^2)}$ *factorizando numerador y denominador*

$= \lim_{x\to 0} \frac{x(1+a^3x^3)}{1+a^2x^2}$ *simplificando la fracción*

$= 0$ *por sustitución directa*

Como $f(x,y)$ se aproxima a 0 cuando (x,y) se aproxima a $(0,0)$ por los ejes, por cualquier recta que pasa por el origen, $y = mx$, y por cualquier parábola $y = ax^2$, con $a \neq 0$, se intuye que, de existir el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, su valor es 0. Ver la gráfica en la figura 2.5.

Figura 2.5 Gráfica de la función $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

Es importante resaltar que, en el cálculo de cada uno de los límites direccionales, las operaciones algebraicas son fundamentales para no llegar a una indeterminación, $\frac{0}{0}$, que no aplica de efectuar correctamente todos los pasos indicados en cada proceso. Retomando, por ejemplo, el cálculo del límite direccional por la recta identidad $y = x$:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,x)$ *sustituyendo* $y = x$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+x^3}{x^2+x^2}$ *evaluando* $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ *en* (x,x)

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^3}{2x^2}$ *efectuando operaciones en numerador y denominador*

$= \lim\limits_{x\to 0} x$ *simplificando la fracción*

$= 0$ *por la propiedad 2.1.4(ii)*

de no efectuar las operaciones en numerador y denominador y simplificar la fracción, antes de evaluar el límite, se llegaría a una indeterminación; es decir, un error bastante común es el siguiente:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,x)$ *sustituyendo* $y = x$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+x^3}{x^2+x^2}$ *evaluando* $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ *en* (x,x)

$= \frac{(0)^3+(0)^3}{(0)^2+(0)^2}$ *por sustitución directa (¡ERROR! antes de evaluar el límite se deben efectuar las operaciones en numerador y denominador y simplificar la fracción resultante)*

O bien:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,x)$ *sustituyendo* $y = x$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+x^3}{x^2+x^2}$ *evaluando* $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ *en* (x,x)

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^3}{2x^2}$ *efectuando operaciones en numerador y denominador*

$= \frac{2(0)^3}{2(0)^2}$ *por sustitución directa (¡ERROR! antes de evaluar el límite se debe simplificar la fracción resultante)*

En ambos procesos erróneos se llegaría al $\frac{0}{0}$ que NO es lo mismo que 0.

2. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^3+y^3}$. Determina si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe.

Solución:

No es aplicable la sustitución directa, puesto que al evaluar la función f en $(0,0)$ se tiene que:

$$f(0,0) = \frac{(0)(0)^2}{(0)^3 + (0)^3} = \frac{0}{0}$$

esto es, se llega a una indeterminación. Tampoco son aplicables los métodos de factorización y racionalización; por lo que se procede a calcular límites direccionales, aproximando (x,y) a $(0,0)$ por diferentes trayectorias que pasan por $(0,0)$.

Por el eje x ($y = 0$):

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,0)$ *sustituyendo* $y = 0$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(0)^2}{x^3+(0)^3}$ *evaluando* $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^3+y^3}$ *en* $(x,0)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x^3}$ *efectuando operaciones en numerador y denominador*

$= \lim\limits_{x\to 0} 0$ *efectuando la división* $\frac{0}{x^3} = 0$, *para* $x \neq 0$

$= 0$ *por la propiedad 2.1.4(i)*

Por el eje y ($x = 0$):

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} f(0,y)$ *sustituyendo* $x = 0$

$= \lim\limits_{y\to 0} \frac{(0)y^2}{(0)^3+y^3}$ *evaluando* $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^3+y^3}$ *en* $(0,y)$

$= \lim\limits_{y\to 0} \frac{0}{y^3}$ *efectuando operaciones en numerador y denominador*

$= \lim\limits_{y\to 0} 0$ *efectuando la división* $\frac{0}{y^3} = 0$, *para* $y \neq 0$

$= 0$ *por la propiedad 2.1.4(i)*

Por la recta $y = x$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x) \text{ sustituyendo } y = x$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{xx^2}{x^3+x^3} \text{ evaluando } f(x,y) = \frac{xy^2}{x^3+y^3} \text{ en } (x,x)$$

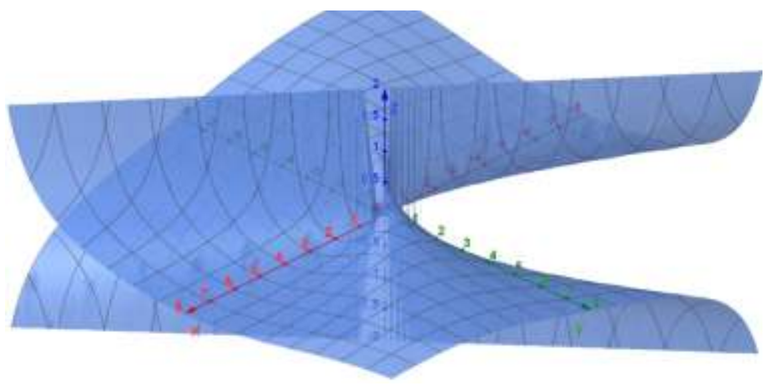
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2x^3} \text{ efectuando operaciones en numerador y denominador}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \text{ simplificando la fracción}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ por la propiedad 2.1.4(i)}$$

Como $f(x,y)$ se aproxima a 0 cuando (x,y) se aproxima a $(0,0)$ por los ejes y se aproxima a $\frac{1}{2}$ cuando (x,y) se aproxima a $(0,0)$ por la recta identidad $y = x$, se concluye que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe; puesto que, por dos trayectorias diferentes, los respectivos límites direccionales toman dos valores distintos. Ver la gráfica en la figura 2.6.

Figura 2.6 Gráfica de la función $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^3+y^3}$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

Nótese que, en particular, a lo largo de los ejes coordenados los límites direccionales existen y valen 0. Un error bastante común en el cálculo de estos límites direccionales es no efectuar la división, $\frac{0}{x^3}$ o $\frac{0}{y^3}$, que da por resultado 0, siempre que $x \neq 0$ y $y \neq 0$ (lo cual se cumple por la definición de límite), antes de evaluar el límite, llegando a una indeterminación.

Por ejemplo, en el proceso realizado para calcular el límite direccional por el eje x:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) \text{ sustituyendo } y = 0$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(0)^2}{x^3+(0)^3} \text{ evaluando } f(x,y) = \frac{xy^2}{x^3+y^3} \text{ en } (x,0)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^3} \text{ efectuando operaciones en numerador y denominador}$$

$$= \lim_{x\to 0} 0 \text{ efectuando la división } \frac{0}{x^3} = 0, \text{ para } x \neq 0$$

$$= 0 \text{ por la propiedad 2.1.4(i)}$$

lo que se suele hacer erróneamente es lo siguiente:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,0)$ *sustituyendo* $y = 0$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(0)^2}{x^3+(0)^3}$ *evaluando* $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^3+y^3}$ *en* $(x,0)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x^3}$ *efectuando operaciones en numerador y denominador*

$= \frac{0}{0}$ *por sustitución directa (¡ERROR! antes de evaluar el límite se debe efectuar la división* $\frac{0}{x^3} = 0$*)*

donde $\frac{0}{0}$ no es lo mismo que 0.

3. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$. Determina si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe. (Adaptado a partir de Estrada, García y Monsivais, 2003, p. 96).

Solución:

Evaluando la función f en $(0,0)$:

$$f(0,0) = \frac{(0)^2(0)}{(0)^4 + (0)^2} = \frac{0}{0}$$

se llega a una indeterminación, por lo que no es aplicable la sustitución directa. Tampoco son aplicables los métodos de factorización y racionalización, por lo que se calcularán límites direccionales, aproximando (x,y) a $(0,0)$ por:

El eje x $(y = 0)$:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,0)$ *sustituyendo* $y = 0$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2(0)}{x^4+(0)^2}$ *evaluando* $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ *en* $(x,0)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x^4}$ *efectuando operaciones en numerador y denominador*

$= \lim\limits_{x\to 0} 0$ *efectuando la división* $\frac{0}{x^4} = 0$, *para* $x \neq 0$

$= 0$ *por la propiedad 2.1.4(i)*

El eje y $(x = 0)$:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} f(0,y)$ *sustituyendo* $x = 0$

$= \lim\limits_{y\to 0} \frac{(0)^2y}{(0)^4+y^2}$ *evaluando* $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ *en* $(0,y)$

$= \lim\limits_{y\to 0} \frac{0}{y^2}$ *efectuando operaciones en numerador y denominador*

$= \lim\limits_{y\to 0} 0$ *efectuando la división* $\frac{0}{y^2} = 0$, *para* $y \neq 0$

$= 0$ *por la propiedad 2.1.4(i)*

La parábola $y = x^2$:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x^2)$ *sustituyendo* $y = x^2$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x^2)}{x^4+(x^2)^2}$ *evaluando* $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ *en* (x,x^2)

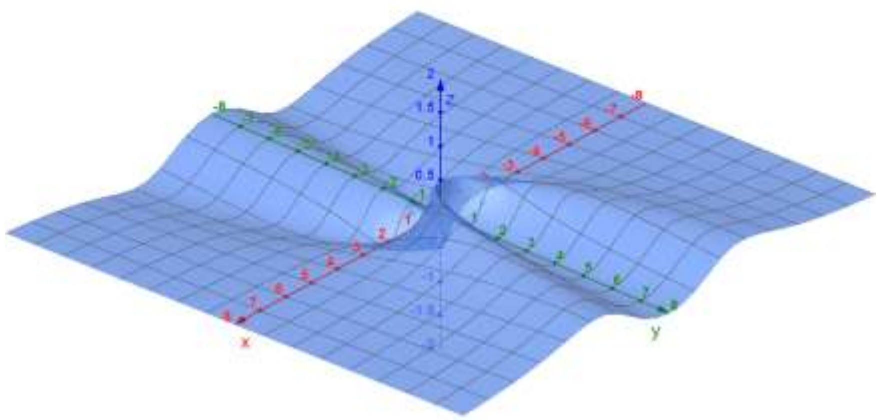
$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4}$ *efectuando operaciones en numerador y denominador*

$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2}$ *simplificando la fracción*

$= \frac{1}{2}$ *por la propiedad 2.1.4(i)*

Como $f(x,y)$ se aproxima a dos números reales distintos $\left(0 \neq \frac{1}{2}\right)$ cuando (x,y) se aproxima a $(0,0)$ por los ejes y por la parábola $y = x^2$, entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe. Ver la gráfica en la figura 2.7.

Figura 2.7 Gráfica de la función $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

En este ejemplo es importante observar que las variables que aparecen en el denominador de la función $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ tienen distinto grado; más aún, el grado de la variable x es el doble del grado de la variable y, motivo por el cual se utilizó la trayectoria $y = x^2$, con la finalidad de igualar los grados de las variables en el denominador y, de este modo, poder realizar las operaciones indicadas en éste. Por otro lado, de haber ocupado la recta identidad, $y = x$, se hubiera llegado a que el límite direccional a lo largo de esta trayectoria es 0, tal como ocurrió por los ejes coordenados; sin embargo, aproximarnos sólo por los ejes coordenados y por la recta identidad, en este caso, no basta para poder obtener la conclusión correcta, que es, que el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.

Nótese que también se podría ocupar la trayectoria $x = \sqrt{y}$, con $y > 0$; sin embargo, la aproximación de y a 0 sólo se puede llevar a cabo por valores mayores que 0, como se indica a continuación.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to 0^+} f\left(\sqrt{y},y\right)$ *sustituyendo* $x = \sqrt{y}$

$= \lim_{y\to 0^+} \frac{(\sqrt{y})^2y}{(\sqrt{y})^4+y^2}$ *evaluando* $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ *en* $\left(\sqrt{y},y\right)$

$= \lim_{y \to 0^+} \frac{y^2}{2y^2}$ *efectuando operaciones en numerador y denominador*

$= \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{2}$ *simplificando la fracción*

$= \frac{1}{2}$ *por la propiedad 2.1.4(i)*

En consecuencia, en el cálculo de los límites direccionales, es fundamental seleccionar de manera adecuada las trayectorias.

4. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función $f(x,y) = \frac{x^9 y}{(x^6+y^2)^2}$. Determina si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe. (Adaptado a partir de Leithold, 1998, p. 940).

Solución:

No es aplicable la sustitución directa, puesto que:

$$f(0,0) = \frac{(0)^9(0)}{((0)^6 + (0)^2)^2} = \frac{0}{0}$$

es decir, se llega a una indeterminación. Nuevamente, no son aplicables los métodos de factorización y racionalización. Se calcularán límites direccionales, aproximando (x,y) a $(0,0)$ por:

El eje x $(y = 0)$:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0)$ *sustituyendo* $y = 0$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x^9(0)}{(x^6+(0)^2)^2}$ *evaluando* $f(x,y) = \frac{x^9 y}{(x^6+y^2)^2}$ *en* $(x,0)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^{12}}$ *efectuando operaciones en numerador y denominador*

$= \lim_{x\to 0} 0$ *efectuando la división* $\frac{0}{x^{12}} = 0$, *para* $x \neq 0$

$= 0$ *por la propiedad 2.1.4(i)*

El eje y $(x = 0)$:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y)$ *sustituyendo* $x = 0$

$= \lim_{y\to 0} \frac{(0)^9 y}{((0)^6+y^2)^2}$ *evaluando* $f(x,y) = \frac{x^9 y}{(x^6+y^2)^2}$ *en* $(0,y)$

$= \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4}$ *efectuando operaciones en numerador y denominador*

$= \lim_{y\to 0} 0$ *efectuando la división* $\frac{0}{y^4} = 0$, *para* $y \neq 0$

$= 0$ *por la propiedad 2.1.4(i)*

La curva $y = x^3$:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,x^3)$ *sustituyendo* $y = x^3$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^9(x^3)}{(x^6+(x^3)^2)^2}$ *evaluando* $f(x,y) = \frac{x^9 y}{(x^6+y^2)^2}$ *en* (x,x^3)

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{12}}{(2x^6)^2}$ *efectuando operaciones en numerador y denominador*

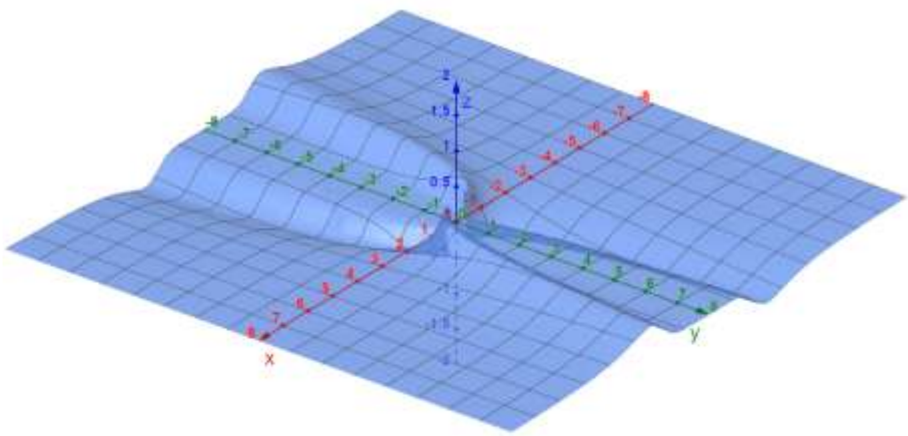
$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{12}}{4x^{12}}$ *efectuando la potencia en el denominador*

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{4}$ *simplificando la fracción*

$= \frac{1}{4}$ *por la propiedad 2.1.4(i)*

Como $f(x,y)$ se aproxima a dos números reales distintos $\left(0 \neq \frac{1}{4}\right)$ cuando (x,y) se aproxima a $(0,0)$ por los ejes y por la curva $y = x^3$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe. Ver la gráfica en la figura 2.8.

Figura 2.8 Gráfica de la función $f(x,y) = \frac{x^9 y}{(x^6+y^2)^2}$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

En este ejemplo, en el denominador de la función $f(x,y) = \frac{x^9 y}{(x^6+y^2)^2}$, el grado de la variable x es el triple del grado de la variable y, razón por la que ahora se usó la trayectoria $y = x^3$, en lugar de la parábola $y = x^2$ o la recta identidad $y = x$, direcciones por las que la función se hubiera aproximado a 0, coincidiendo con los límites direccionales a lo largo de los ejes coordenados. De aquí que, aproximarnos sólo por los ejes coordenados, por la recta identidad y por la parábola, en este caso, no es suficiente para concluir que el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.

Nótese que también sirve ocupar la trayectoria $x = \sqrt[3]{y}$, en lugar de $y = x^3$, como se indica a continuación.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} f\left(\sqrt[3]{y}, y\right)$ *sustituyendo* $x = \sqrt[3]{y}$

$= \lim\limits_{y\to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{y}\right)^9 y}{\left(\left(\sqrt[3]{y}\right)^6+y^2\right)^2}$ *evaluando* $f(x,y) = \frac{x^9 y}{(x^6+y^2)^2}$ *en* $\left(\sqrt[3]{y}, y\right)$

$= \lim\limits_{y\to 0} \frac{y^4}{(2y^2)^2}$ *efectuando operaciones en numerador y denominador*

$= \lim_{y \to 0} \frac{y^4}{4y^4}$ *efectuando la potencia en el denominador*

$= \lim_{y \to 0} \frac{1}{4}$ *simplificando la fracción*

$= \frac{1}{4}$ *por la propiedad 2.1.4(i)*

Después de haber analizado en los ejemplos anteriores el límite de funciones reales de dos variables por los diversos métodos estudiados en este capítulo, podemos resumir el proceso a seguir para el cálculo del límite, como se describe a continuación.

Para determinar si $\lim_{P \to A} f(P)$ existe o no, donde $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P = (x, y)$ y $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, primero se intenta calcular el límite por *sustitución directa*. Si $\lim_{P \to A} f(P) = f(A)$, con $f(A) \in \mathbb{R}$, entonces el límite existe y es igual a $f(A)$. Si el límite no se puede calcular por sustitución directa porque $f(A) = \frac{0}{0}$ (es una indeterminación), entonces se intenta aplicar el *método de factorización* o el *método de racionalización*. Si el límite no se puede obtener por alguno de los métodos mencionados, aun cuando $f(A) = \frac{0}{0}$, entonces se intenta mostrar que el límite no existe, *aproximando P a A por dos o más rectas o curvas distintas* y viendo que efectivamente $f(P)$ no se aproxima a un mismo número real. Si ocurre que para tres o más rectas o curvas adecuadas $f(P)$ se aproxima a un mismo número real L, entonces puede intuirse que, de existir el límite $\lim_{P \to A} f(P)$, éste debe ser igual a L. A este último método se le conoce como *cálculo de límites direccionales* y se realiza para mostrar formalmente que un límite no existe; o bien, intuir o concluir informalmente sobre la existencia de un límite, principalmente cuando el límite es de la forma:

(*) $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ con $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(0,0) = \frac{0}{0}$

2.1.7 Resolución de límites por coordenadas polares

En el caso particular en el que el límite es de la forma (*), cuando no es posible aplicar los métodos de factorización ni racionalización para determinar el límite, además del cálculo de límites direccionales, se pueden llevar a cabo las siguientes sustituciones:

$x = r \cos \theta, y = r sen\theta$

es decir, cambiar a coordenadas polares, (r, θ), donde r representa la distancia de cualquier punto en el plano cartesiano (x, y) al origen, $(0,0)$, y θ es el ángulo que se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj, desde la parte positiva del eje x hasta el vector que inicia en el origen y termina en el punto (x, y), con $r \geq 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$. De este modo:

$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = \lim_{r \to 0} f(r \cos \theta, r sen\theta)$

Donde, además:

$x^2 + y^2 = (r \cos \theta)^2 + (r sen\theta)^2$

$= r^2 \cos^2 \theta + r^2 sen^2\theta$

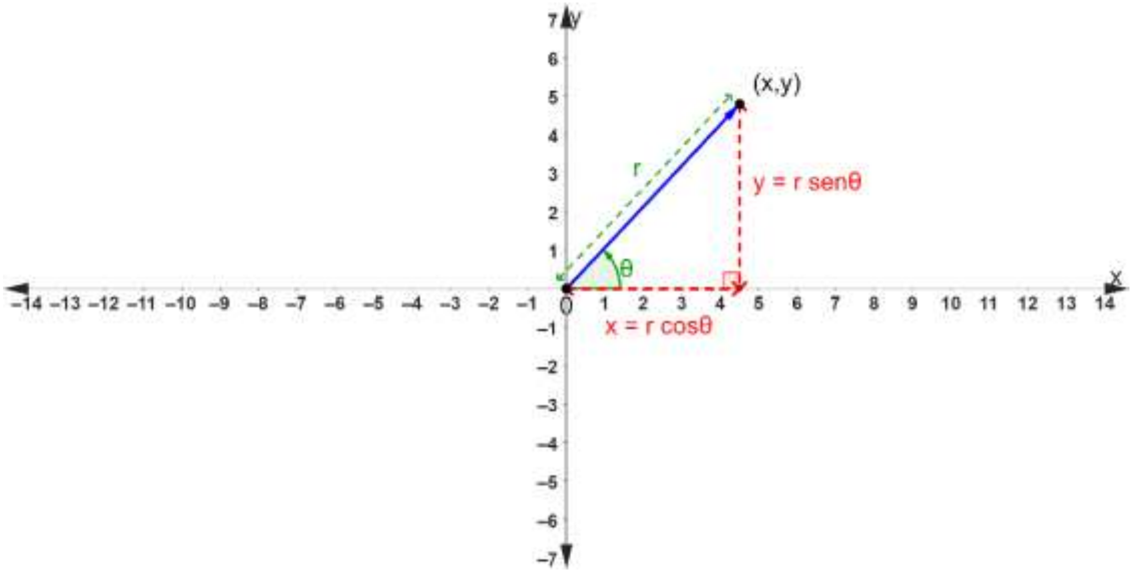
$= r^2(\cos^2 \theta + sen^2\theta)$

$= r^2(1)$

$= r^2$

Debido a la identidad trigonométrica: $cos^2\,\theta + sen^2\theta = 1$. Ver en la figura 2.9 la equivalencia entre coordenadas rectangulares (x, y) y las coordenadas polares (r, θ).

Figura 2.9 Representación de las coordenadas del punto (x, y) en coordenadas polares:
$x = r\,cos\,\theta\,, y = rsen\theta$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico

Es importante advertir que aplicar coordenadas polares es equivalente a calcular límites direccionales por rectas que pasan por el origen, cuya ecuación es de la forma $y = mx$. Como se muestra en la figura 2.10(a)-(b), cualquier punto (x, y) en el plano cartesiano determina un vector que inicia en $(0,0)$ y termina en (x, y), al cual se le puede asociar su correspondiente distancia r y ángulo θ, de modo que $x = r\,cos\,\theta\,, y = rsen\theta$. Así mismo, cada uno de esos puntos (x, y) determina una recta que pasa por $(0,0)$ y, en consecuencia, una posible trayectoria sobre la que se puede calcular su respectivo límite direccional $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x, mx)$.

Figura 2.10 (a) Vectores determinados por puntos (x, y) en el plano cartesiano, que inician en el $(0,0)$

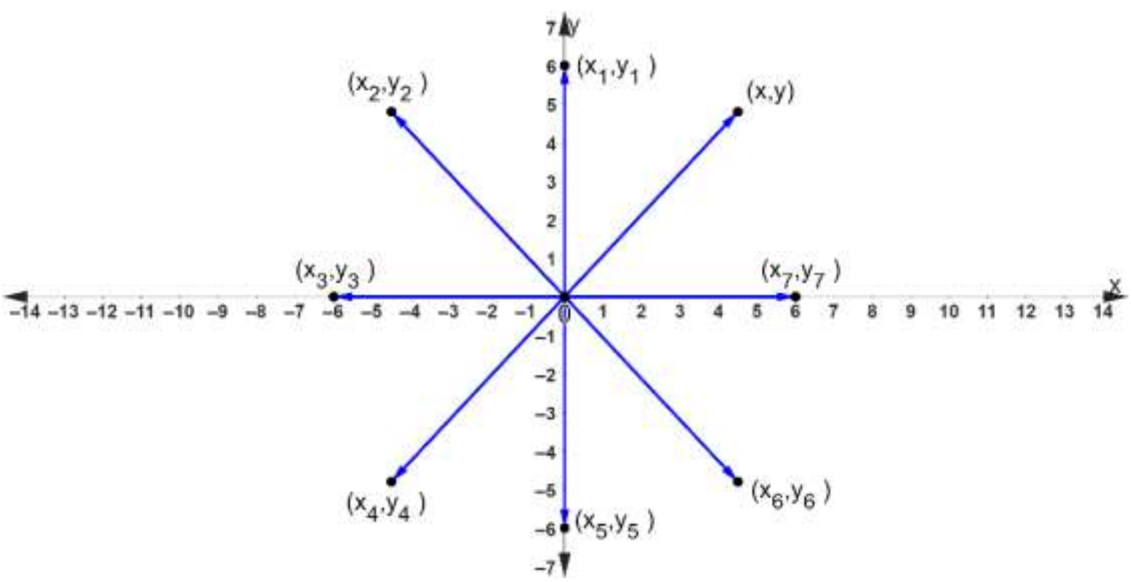
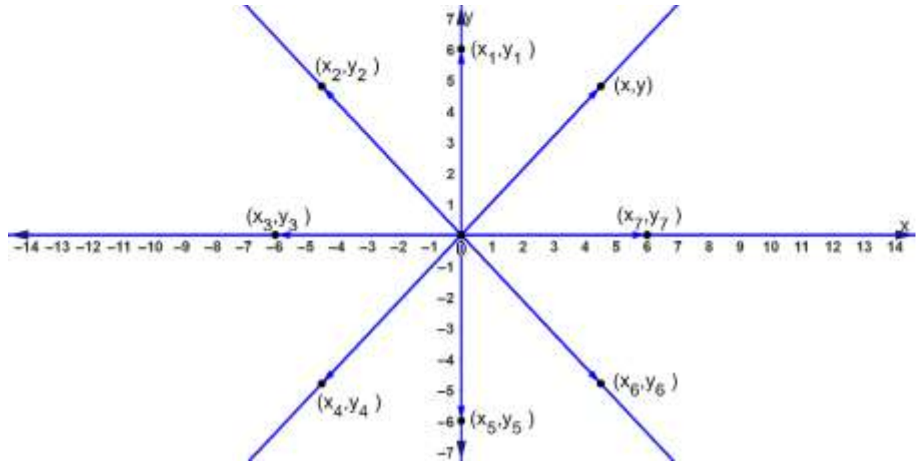


Figura 2.10 (b) Rectas determinadas por puntos (x, y) en el plano cartesiano, que pasan por el $(0,0)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico

Ejemplos

1. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$. Determina si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existe.

Solución:

En el ejemplo 1 de la sección 2.1.6, se utilizaron límites direccionales para concluir que el posible valor del límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ es 0.

Ahora se usarán coordenadas polares:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\theta, rsen\theta)$

$= \lim\limits_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)^3+(rsen\theta)^3}{(r\cos\theta)^2+(r\,sen\,\theta)^2}$
evaluando $f(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ *en* $x = r\cos\theta,\ y = rsen\theta$

$= \lim\limits_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta+r^3sen^3\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2sen^2\theta}$
efectuando las potencias

$= \lim\limits_{r\to 0} \frac{r^3(\cos^3\theta+sen^3\theta)}{r^2(\cos^2\theta+sen^2\theta)}$
factorizando numerador y denominador

$= \lim\limits_{r\to 0} \frac{r(\cos^3\theta+sen^3\theta)}{\cos^2\theta+sen^2\theta}$
simplificando la fracción

$= \lim\limits_{r\to 0} \frac{r(\cos^3\theta+sen^3\theta)}{1}$
aplicando la identidad $\cos^2\theta + sen^2\theta = 1$

$= \lim\limits_{r\to 0} r(\cos^3\theta + sen^3\theta)$
dividiendo

$= (\cos^3\theta + sen^3\theta)\lim\limits_{r\to 0} r$
por la propiedad 2.1.4(iii)

$= (cos^3\,\theta + sen^3\theta)(0)$
por la propiedad 2.1.4(ii)

$= 0$

Donde la expresión $cos^3\,\theta + sen^3\theta$ no depende de r y es acotada, es decir, no tiende a crecer indefinidamente al variar los valores de θ.

2. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^3+y^3}$. Determina si $\lim\limits_{(x,y)\rightarrow(0,0)} f(x,y)$ existe.

Solución:

En el ejemplo 2 de la sección 2.1.6, se utilizaron límites direccionales para mostrar que $\lim\limits_{(x,y)\rightarrow(0,0)} f(x,y)$ no existe. Ahora se usarán coordenadas polares:

$\lim\limits_{(x,y)\rightarrow(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{r\rightarrow 0} f(r\cos\theta\,, rsen\theta)$

$= \lim\limits_{r\rightarrow 0} \frac{(r\cos\theta)(r\,sen\,\theta)^2}{(r\cos\theta)^3+(r\,sen\,\theta)^3}$
evaluando $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^3+y^3}$ *en* $x = r\cos\theta,\, y = rsen\theta$

$= \lim\limits_{r\rightarrow 0} \frac{r^3\cos\theta\,sen^2\,\theta}{r^3\cos^3\theta+r^3sen^3\theta}$
efectuando operaciones

$= \lim\limits_{r\rightarrow 0} \frac{r^3(\cos\theta\,sen^2\,\theta)}{r^3(\cos^3\theta+sen^3\theta)}$
factorizando numerador y denominador

$= \lim\limits_{r\rightarrow 0} \frac{\cos\theta\,sen^2\,\theta}{\cos^3\theta+sen^3\theta}$
simplificando la fracción

$= \frac{\cos\theta\,sen^2\,\theta}{\cos^3\theta+sen^3\theta}$
por la propiedad 2.1.4(i)

Donde la expresión $\frac{\cos\theta\,sen^2\,\theta}{\cos^3\theta+sen^3\theta}$ no depende de r, pero tampoco es un valor fijo (no es una constante), puesto que varía conforme a los diferentes valores que puede tomar θ. De aquí que, el valor del límite no es único y, en consecuencia, no existe.

3. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x,y) = \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}$. Determina si $\lim\limits_{(x,y)\rightarrow(0,0)} f(x,y)$ existe. (Adaptado a partir de Leithold, 1998, p. 940).

Solución:

Evaluando la función f en $(0,0)$:

$$f(0,0) = \frac{(0)^2(0) + (0)(0)^2}{(0)^2 + (0)^2} = \frac{0}{0}$$

se llega a una indeterminación, lo cual no implica que el límite no existe. Como no son aplicables los métodos de sustitución directa, factorización y racionalización, se calcularán límites direccionales, aproximando (x,y) a $(0,0)$ por:

El eje x $(y = 0)$:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,0)$ *sustituyendo* $y = 0$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2(0)+x(0)^2}{x^2+(0)^2}$ *evaluando* $f(x,y) = \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}$ *en* $(x,0)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x^2}$ *efectuando operaciones en numerador y denominador*

$= \lim\limits_{x\to 0} 0$ *efectuando la división* $\frac{0}{x} = 0$, *para* $x \neq 0$

$= 0$ *por la propiedad 2.1.4(i)*

El eje y $(x = 0)$:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} f(0,y)$ *sustituyendo* $x = 0$

$= \lim\limits_{y\to 0} \frac{(0)^2y+(0)y^2}{(0)^2+y^2}$ *evaluando* $f(x,y) = \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}$ *en* $(0,y)$

$= \lim\limits_{y\to 0} \frac{0}{y^2}$ *efectuando operaciones en numerador y denominador*

$= \lim\limits_{y\to 0} 0$ *efectuando la división* $\frac{0}{y^2} = 0$, *para* $y \neq 0$

$= 0$ *por la propiedad 2.1.4(i)*

Por la recta $y = x$:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,x)$ *sustituyendo* $y = x$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2x+xx^2}{x^2+x^2}$ *evaluando* $f(x,y) = \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}$ *en* (x,x)

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^3}{2x^2}$ *efectuando operaciones en numerador y denominador*

$= \lim\limits_{x\to 0} x$ *simplificando la fracción*

$= 0$ *por la propiedad 2.1.4(ii)*

Como $f(x,y)$ se aproxima a 0 cuando (x,y) se aproxima a $(0,0)$ por los ejes y por la recta identidad $y = x$, se intuye que, de existir el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, su valor es 0.

Utilizando ahora coordenadas polares:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} f(r\cos\theta, rsen\theta)$

$= \lim\limits_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)^2(rsen\theta)+(r\cos\theta)(rsen\theta)^2}{(r\cos\theta)^2+(rsen\theta)^2}$

evaluando $f(x,y) = \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}$ *en* $x = r\cos\theta$, $y = rsen\theta$

$= \lim\limits_{r\to 0} \frac{r^3\cos^2\theta sen\theta+r^3\cos\theta sen^2\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2sen^2\theta}$

efectuando operaciones en numerador y denominador

$= \lim\limits_{r \to 0} \frac{r^3 \cos\theta sen\theta(\cos\theta + sen\theta)}{r^2(\cos^2\theta + sen^2\theta)}$
factorizando numerador y denominador

$= \lim\limits_{r \to 0} \frac{r \cos\theta sen\theta(\cos\theta + sen\theta)}{\cos^2\theta + sen^2\theta}$
simplificando la fracción

$= \lim\limits_{r \to 0} \frac{r \cos\theta sen\theta(\cos\theta + sen\theta)}{1}$
aplicando la identidad $\cos^2\theta + sen^2\theta = 1$

$= \lim\limits_{r \to 0} r \cos\theta\, sen\theta(\cos\theta + sen\theta)$
dividiendo

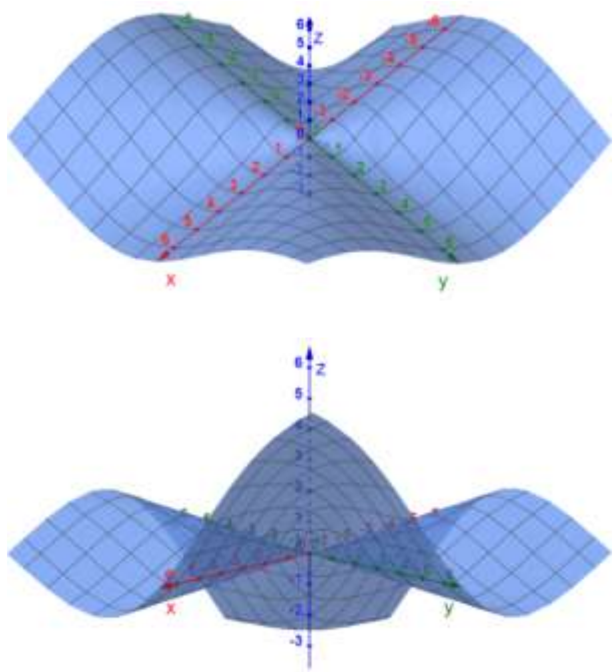
$= \cos\theta\, sen\theta(\cos\theta + sen\theta) \lim\limits_{r \to 0} r$
por la propiedad 2.1.4(iii)

$= \cos\theta\, sen\theta(\cos\theta + sen\theta)(0)$
por la propiedad 2.1.4(ii)

$= 0$

De aquí que, efectivamente, el posible valor del límite $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ es 0. Ver la gráfica en la figura 2.11.

Figura 2.11 Gráfica de la función $f(x,y) = \frac{x^2y + xy^2}{x^2 + y^2}$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

2.2 Continuidad

En la sección anterior se estudiaron los diversos métodos que permiten determinar el límite de una función, en particular, de una función real de dos variables. Ahora se incluirá la existencia del límite como una condición necesaria para establecer otro concepto importante del Cálculo, que es el concepto de continuidad de una función, iniciando con la continuidad en un punto.

2.2.1 Definición de continuidad en un punto y tipos de discontinuidad

Sean $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $A \in \mathbb{R}^n$. Se dice que f es una función continua en A si se satisfacen las siguientes tres condiciones:

(i) $f(A)$ existe.

(ii) $\lim_{P \to A} f(P)$ existe.

(iii) $\lim_{P \to A} f(P) = f(A)$.

Si una o más de estas tres condiciones no se cumple, entonces se dice que f es discontinua en A. Además, la discontinuidad puede ser removible o esencial, dependiendo de si el límite $\lim_{P \to A} f(P)$ existe o no. Así, f tiene una discontinuidad *removible* (o *evitable*) en A si $\lim_{P \to A} f(P)$ existe; mientras que, f tiene una discontinuidad *esencial* (o *no evitable*) en A si $\lim_{P \to A} f(P)$ no existe.

Para el caso particular en que $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, P y A son pares ordenados de la forma $P = (x, y)$ y $A = (a, b)$, donde x, y son las variables independientes y a, b son números reales. De modo que, f es continua en el punto $A = (a, b)$ si y sólo si:

(i) $f(a, b)$ existe.

(ii) $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y)$ existe.

(iii) $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.

Donde "$f(a, b)$ existe" y "$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y)$ existe" significa que tanto la función f evaluada en el punto (a, b), $f(a, b)$, como el límite $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y)$, toman valores reales.

Ejemplos

1. Determina si la función $f(x, y) = 6x^2 - 3x^2y + y - 5$ es continua en $(-1,1)$.

Solución:

Para determinar la continuidad de la función en el punto indicado, se verá si se cumplen o no las tres condiciones de la definición 2.2.1. Primero, se evalúa la función en el punto $(-1,1)$:

$$f(-1,1) = 6(-1)^2 - 3(-1)^2(1) + (1) - 5 = 6 - 3 + 1 - 5 = -1$$

Es decir, $f(-1,1) = -1$ es un número real, por lo que $f(-1,1)$ existe y se cumple la condición (i). Ahora se calcula el límite $\lim_{(x,y) \to (-1,1)} f(x, y)$ por sustitución directa:

$$\lim_{(x,y) \to (-1,1)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \to (-1,1)} 6x^2 - 3x^2y + y - 5$$

$$= 6(-1)^2 - 3(-1)^2(1) + (1) - 5$$

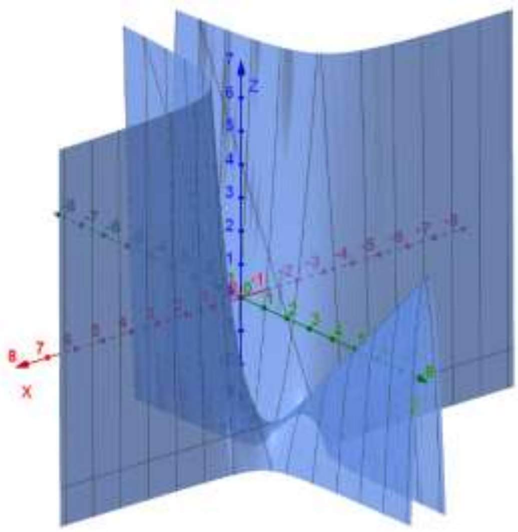
$$= -1$$

Esto es, $\lim_{(x,y) \to (-1,1)} f(x, y) = -1$, por lo que $\lim_{(x,y) \to (-1,1)} f(x, y)$ existe y se cumple la condición (ii). Finalmente, como se tiene que:

$$\lim_{(x,y) \to (-1,1)} f(x, y) = -1 = f(-1,1)$$

también se cumple la condición (iii). Como se satisfacen las condiciones (i), (ii) y (iii), entonces f es continua en $(-1,1)$. Ver la gráfica en la figura 2.12.

Figura 2.12 Gráfica de la función $f(x,y) = 6x^2 - 3x^2y + y - 5$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

De hecho, la función $f(x,y) = 6x^2 - 3x^2y + y - 5$ es continua en cada punto de la forma $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, por ser una función polinomial de dos variables. La continuidad de las funciones polinomiales se establecerá formalmente en la sección 2.2.2.

2. Determina si la función $f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2+25}$ es continua en $(-3,-4)$.

Solución:

Se procede a revisar si se cumplen las condiciones de la definición 2.2.1. Primero, se evalúa la función en el punto $(-3,-4)$:

$$f(-3,-4) = \frac{-3-(-4)}{(-3)^2+(-4)^2+25} = \frac{-3+4}{9+16+25} = \frac{1}{50}$$

Como $f(-3,-4) = \frac{1}{50}$, que es un número real, entonces $f(-3,-4)$ existe, cumpliéndose la condición (i). En segundo lugar, se calcula el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(-3,-4)} f(x,y)$ que, como se muestra a continuación, se puede resolver por sustitución directa:

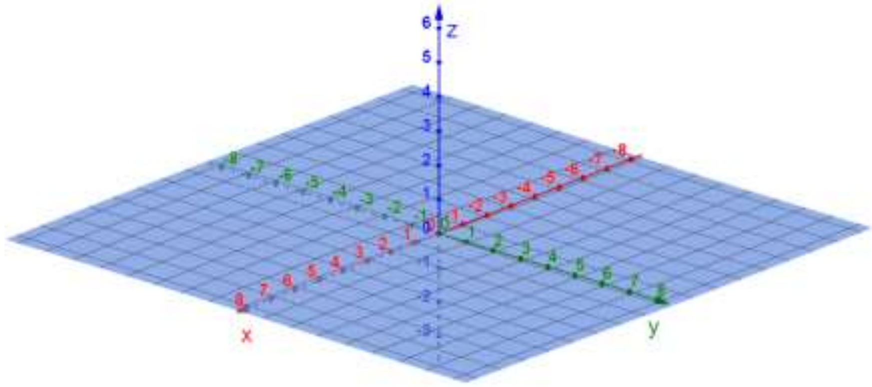
$$\lim_{(x,y)\to(-3,-4)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(-3,-4)} \frac{x-y}{x^2+y^2+25} = \frac{-3+4}{9+16+25} = \frac{1}{50}$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(-3,-4)} f(x,y) = \frac{1}{50}$, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(-3,-4)} f(x,y)$ existe y se cumple la condición (ii). Además, se tiene que:

$$\lim_{(x,y)\to(-3,-4)} f(x,y) = \frac{1}{50} = f(-3,-4)$$

Es decir, se cumple la condición (iii). Como se cumplen (i), (ii) y (iii), entonces: f es continua en $(-3,-4)$. Ver la gráfica en la figura 2.13.

Figura 2.13 Gráfica de la función $f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2+25}$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

De hecho, la función $f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2+25}$ es continua en cada punto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, por ser una función racional definida en todo $\mathbb{R}^2$. La continuidad de las funciones racionales se establecerá formalmente en la sección 2.2.2.

3. Determina si la función $f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{x+y}$ es continua en $(-1,1)$.

Solución:

Como $f(-1,1) = \frac{(1)^2-(-1)^2}{-1+1} = \frac{0}{0}$ no está definido (no existe), entonces f es discontinua en $(0,0)$, debido a que no se cumple la condición (i) de la definición 2.2.1. Ver la gráfica en la figura 2.14. Además, es una discontinuidad removible, puesto que:

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{y^2-x^2}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{(y-x)(y+x)}{x+y}$$

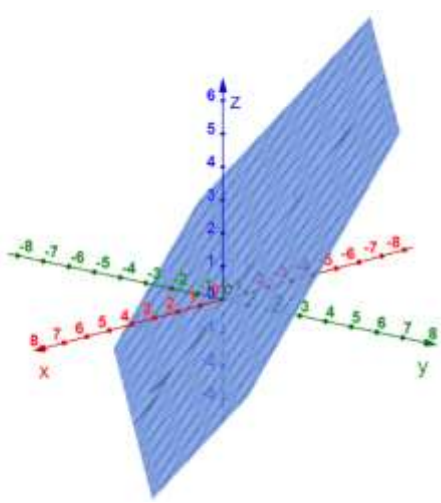
$$= \lim_{(x,y)\to(-1,1)} (y-x)$$

$$= 1-(-1)$$

$$= 2$$

Esto es, $\lim_{(x,y)\to(-1,1)} f(x,y)$ existe y es igual a 2 (por el método de factorización).

Figura 2.14 Gráfica de la función $f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{x+y}$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

4. Determina si la función $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ es continua en $(0,0)$. (Adaptado a partir de Leithold, 1998, p. 933).

Solución:

Como $f(0,0) = \frac{0}{(0)^2+(0)^2} = \frac{0}{0}$ no está definido (no existe), entonces f es discontinua en $(0,0)$, debido a que no se cumple la condición (i) de la definición 2.2.1. Ver la gráfica en la figura 2.15.

Además, es una discontinuidad esencial, pues al aproximar (x,y) a $(0,0)$ por el eje x se tiene que:

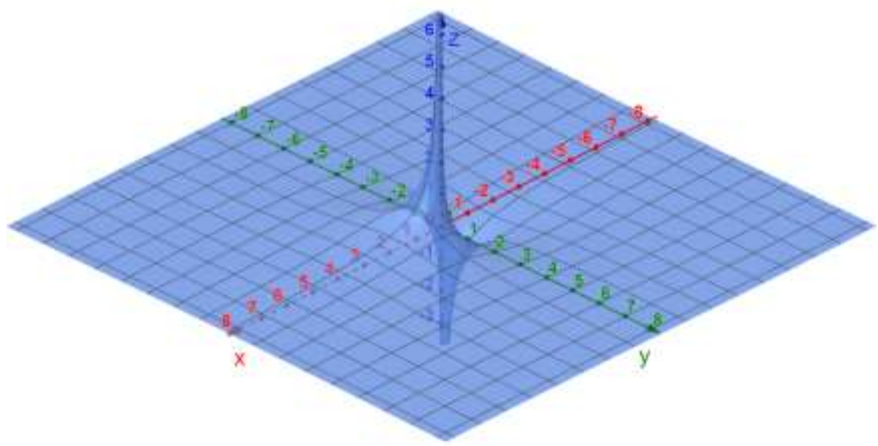
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+(0)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

donde $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ no existe, puesto que sus límites laterales no toman valores reales:

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

De aquí que, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.

Figura 2.15 Gráfica de la función $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

5. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^3+y^3} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Determina qué tipo de discontinuidad tiene f en $(0,0)$.

Solución:

En este caso, se trata de una función a trozos definida por $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^3+y^3}$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$ y tal que $f(0,0) = 0$; es decir, f sí toma un valor real, de 0, en $(0,0)$. En otras palabras, $f(0,0)$ existe y se cumple la condición (i) de la definición 2.2.1.

Por otro lado, como el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ se calcula a partir de que $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^3+y^3}$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$, aplicando el método de los límites direccionales, como se vio en el ejemplo 2 de la sección 2.1.6, se concluye que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe; puesto que, los límites direccionales por los ejes coordenados toman el valor de 0, mientras que el límite en la dirección de la recta identidad, $y = x$, vale $\frac{1}{2}$. De aquí que, no se cumple la condición (ii) de la definición 2.2.1 y, en consecuencia, f es discontinua en $(0,0)$ y la discontinuidad es esencial.

A continuación, se verá que las operaciones entre funciones continuas dan por resultado una nueva función continua.

2.2.2 Propiedades de las funciones continuas y sus consecuencias

Si f y g son funciones continuas en A y c es un número real cualquiera, entonces cf, $f+g$ y $f-g$ son continuas en A. En particular, si f y g son funciones de valores reales, también la multiplicación fg y la división $\frac{f}{g}$ son continuas en A, agregando que $g(A) \neq 0$, para el caso de la división. Además, para $f(P) = \big(f_1(P), f_2(P), \dots, f_m(P)\big)$ se tiene que f es continua en A si y sólo si $f_1, f_2, \dots, f_m$ son continuas en A.

Estas propiedades se deducen de las respectivas propiedades de los límites, establecidas en la sección 2.1.4. Más aún, se tiene que: *f es continua en un conjunto si es continua en cada elemento de dicho conjunto*, siempre que f es una función de varias variables con valores reales o vectoriales. A su vez, como consecuencia de las propiedades de las funciones continuas, se satisfacen las siguientes afirmaciones:

(i) Toda función polinomial de n variables es continua en $\mathbb{R}^n$.

(ii) Toda función racional de n variables es continua en su dominio.

Afirmaciones que quedan ilustradas a través de los siguientes ejemplos.

1. Las funciones $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4$, $f(x,y) = x^2 - 2xy - 3y^2$ y $f(x,y) = 5xy^2 + 2y$ son continuas en $\mathbb{R}^2$, por ser funciones polinomiales en dos variables. Así mismo, las funciones $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $f(x,y,z) = x^5 + 3x^2y - 2xz^2 + y^3z$ y $f(x,y,z) = 3xyz$ son continuas en $\mathbb{R}^3$, por ser funciones polinomiales en tres variables.

2. Las funciones $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$, $f(x,y) = \frac{5xy^2+2y}{16-x^2-4y^2}$ y $f(x,y,z) = \frac{xz}{x-y}$ son continuas en sus respectivos dominios, por ser funciones racionales. De este modo:
   $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ es continua en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) \neq (0,0)\}$.
   $f(x,y) = \frac{5xy^2+2y}{16-x^2-4y^2}$ es continua en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 16 - x^2 - 4y^2 \neq 0\}$.
   $f(x,y,z) = \frac{xz}{x-y}$ es continua en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x - y \neq 0\}$.

3. La función $f(x,y,z) = \left(x^2y, \frac{x^3+y}{z}\right)$ es continua en su dominio $Domf = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z \neq 0\}$; puesto que, $f_1(x,y,z) = x^2y$ es continua en $\mathbb{R}^3$ (por ser una función polinomial de tres variables) y $f_2(x,y,z) = \frac{x^3+y}{z}$ es continua en su dominio $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z \neq 0\}$ (por ser una función racional).

4. La función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^3+y^3} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$, excepto en el $(0,0)$.
   En efecto, como $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^3+y^3}$ para $(x,y) \neq (0,0)$ entonces f es continua en cada $(x,y) \neq (0,0)$, por coincidir con una función racional. Además, se ha mostrado anteriormente que f es discontinua (esencial) en $(0,0)$.

Otra propiedad importante se estudiará en la siguiente sección y trata sobre la composición de funciones continuas.

2.2.3 Composición de funciones continuas

Sean $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ dos funciones tales que $g(P) \in Domf$ para todo $P \in Domg$. Si g es continua en $A \in Domg$ y f es continua en $g(A) \in Domf$, entonces la función compuesta $f \circ g$ es continua en A. Más aún, el límite de $f \circ g$ se calcula de la siguiente manera:

$\lim_{P \to A}(f \circ g)(P) = (f \circ g)(A)$

Es decir:

$$\lim_{P \to A}(f \circ g)(P) = f\left(\lim_{P \to A} g(P)\right)$$

Donde $\lim_{P \to A} g(P)$ existe y toma el valor de $g(A)$, en virtud de que g es continua en A.

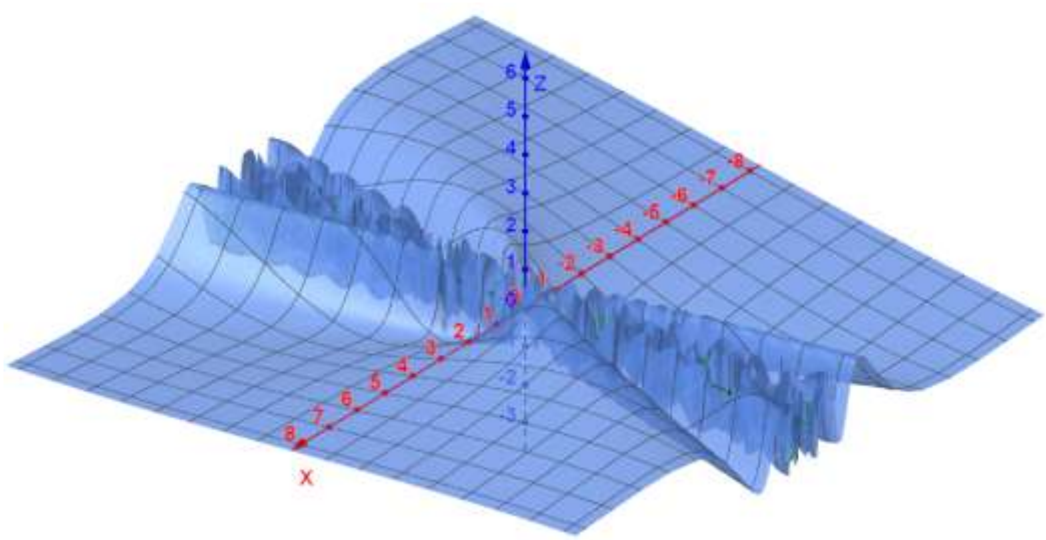
Para el caso en que g es una función real de dos variables, $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y f es una función real de una variable, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, el cálculo del límite de la composición $f \circ g$ se realiza como sigue: $\lim_{(x,y) \to (a,b)}(f \circ g)(x,y) = f\left(\lim_{(x,y) \to (a,b)} g(x,y)\right) = f\big(g(a,b)\big)$

donde $P = (x,y)$ y $A = (a,b)$. También se obtienen las siguientes afirmaciones como consecuencia de la composición de funciones continuas.

1. Como las funciones $f(t) = sent$, $f(t) = cos\, t$ y $f(t) = e^t = exp(t)$ son continuas en todo $\mathbb{R}$, entonces determinar en qué puntos es continua una función de la forma $h(P) = sen[g(P)]$ o $h(P) = cos[g(P)]$ o $h(P) = exp[g(P)]$, donde $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es equivalente a determinar los puntos $P \in \mathbb{R}^n$ en los cuales g es continua. Así
   $h(x,y) = sen\left(\frac{y}{x}\right)$ es continua en su dominio: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\}$.
   $h(x,y,z) = cos(x^2 + y^2 - z^2)$ es continua en su dominio: $\mathbb{R}^3$.
   $h(x,y) = exp\left(\frac{1}{x-y}\right)$ es continua en su dominio: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq y\}$.

   Además, el límite de cada una de las funciones compuestas, $h = f \circ g$, se calcula por sustitución directa en aquellos puntos que pertenecen al dominio de la función h (mismo dominio de la función interna g). Por ejemplo, para la función $h(x,y) = sen\left(\frac{y}{x}\right)$, que es la composición de $f(t) = sent$ con $g(x,y) = \frac{y}{x}$, se tiene que: $\lim_{(x,y) \to (2,\pi)} h(x,y) = \lim_{(x,y) \to (2,\pi)} sen\left(\frac{y}{x}\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ donde $(2,\pi)$ pertenece al dominio de h, puesto que su coordenada x es 2 (distinta de 0). Ver la gráfica en la figura 2.16.

Figura 2.16 Gráfica de la función $h(x,y) = sen\left(\frac{y}{x}\right)$

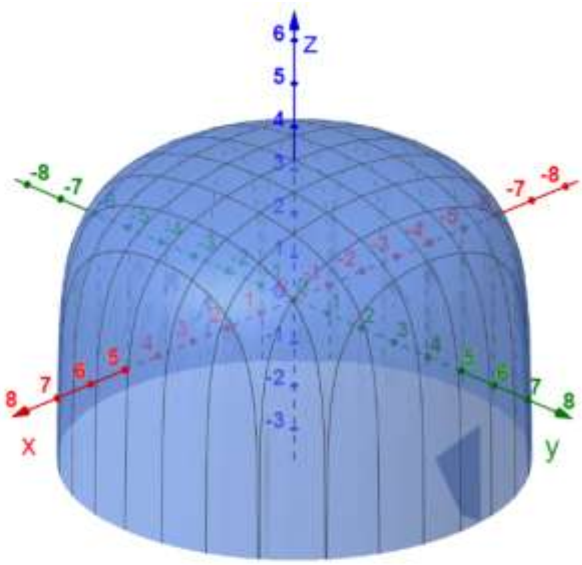


Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

2. Como las funciones $f(t) = \sqrt{t}$ y $f(t) = ln\, t$ son continuas en todos los números reales positivos, entonces determinar en qué puntos es continua una función de la forma: $h(P) = \sqrt{g(P)}$ o $h(P) = ln[g(P)]$, donde $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es equivalente a determinar los puntos $P \in \mathbb{R}^n$ en los cuales g es continua y además $g(P) > 0$. De este modo:
$h(x,y,z) = \sqrt{49 - x^2 - y^2 - z^2}$ es continua en el conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 49 - x^2 - y^2 - z^2 > 0\}$.
$h(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2 - 4}$ es continua en el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y^2 - 4 > 0\}$.
$h(x,y) = ln(25 - x^2 - y^2)$ es continua en el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 25 - x^2 - y^2 > 0\}$.

Además, el límite de cada una de las funciones compuestas, $h = f \circ g$, se calcula por sustitución directa en aquellos puntos del dominio de la función interna g tales que g toma valores mayores que 0. Por ejemplo, para la función definida por $h(x,y) = ln(25 - x^2 - y^2)$, que es la composición de las funciones $f(t) = ln\, t$ y $g(x,y) = 25 - x^2 - y^2$, se tiene que: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} ln(25 - x^2 - y^2) = ln(25)$ donde $(0,0)$ es un elemento del dominio de g tal que $g(x,y) = 25 - x^2 - y^2$ toma un valor mayor que 0. Ver la gráfica en la figura 2.17.

Figura 2.17 Gráfica de la función $h(x,y) = ln(25 - x^2 - y^2)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

Ejercicios Propuestos

En los ejercicios 1 a 10, determina si el límite existe o no. Justifica tu respuesta mostrando el método aplicado (sustitución directa, factorización, racionalización, límites direccionales o coordenadas polares).

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{2x^2-xy-3y^2}{5x^2+7xy+2y^2}$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2-xy+y^2}$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-2)} \frac{x(x-3)}{y+2}$

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^3-y^3}{x-y}$

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(9,-1)} \frac{\sqrt{x}+3y}{x-9y^2}$

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+3x^2+3y^2+y^4}{x^2+y^2}$

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^3+2y^3}$

10. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^6+y^6}$

En los ejercicios 11 a 18, determina el conjunto más grande en que la función f es continua.

11. $f(x,y) = \frac{exp(x^2)}{x-y}$

12. $f(x,y) = cos\left(\frac{x}{y^2-1}\right)$

13. $f(x,y) = \frac{x^3+y}{x^2+1}$

14. $f(x,y) = ln\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)$

15. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

16. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

17. $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$

18. $f(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{x^2-2y^2+5}}$

En los ejercicios 19 a 22, determina si la discontinuidad de f en $(0,0)$ es removible o esencial.

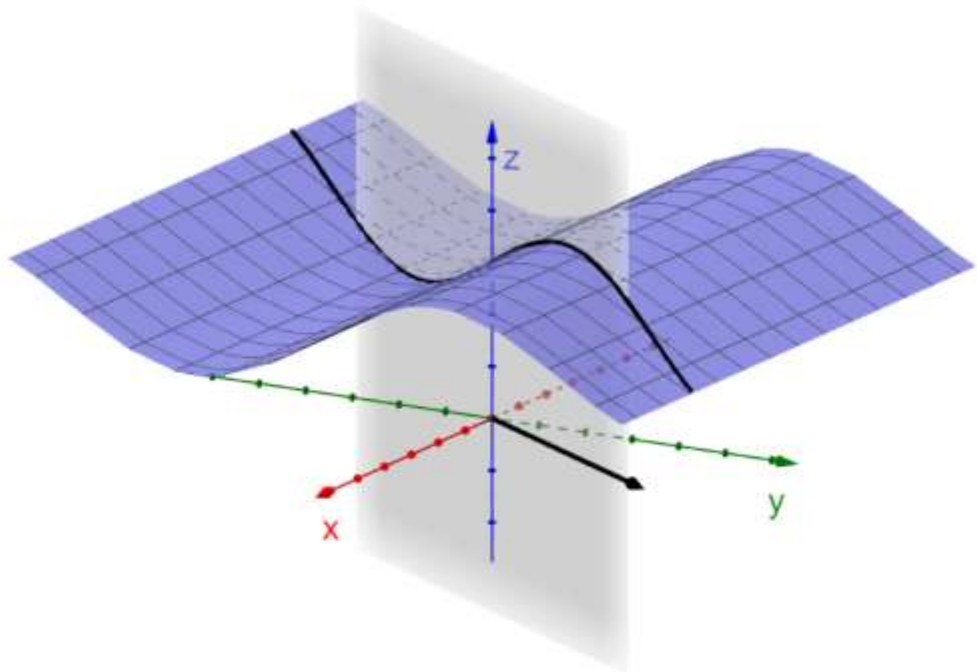
19. $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x+y}$

20. $f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+5xy+3y^2}$

21. $f(x,y)=\frac{6xy^2-2y^3}{x^2+y^2}$

22. $f(x,y)=\frac{2x^4y}{x^6+y^3}$

Capítulo 3. Derivadas Parciales y Diferenciabilidad



Este capítulo se centra en un concepto fundamental que permite caracterizar de manera más amplia a las funciones reales de varias variables, contemplando que el valor de la función puede cambiar conforme lo hace cada una de las variables de las cuales depende. Por ejemplo, en la función donde se relaciona a la distancia recorrida d con la velocidad v y el tiempo t, $d = vt$, una cuestión a responder sería qué distancia se puede recorrer conforme se incrementa o se disminuye la velocidad mientras que el tiempo se mantiene sin cambio; o bien, cuál es la distancia recorrida conforme cambia el tiempo, mientras que la velocidad se mantiene constante. El concepto referido es el de derivada parcial, como una generalización del concepto de derivada ordinaria de una función real de una variable estudiada en el curso de Cálculo de una Variable, mediante la aplicación de los límites, enfatizando en el cálculo de las derivadas parciales de funciones de dos variables.

3.1 Derivadas parciales

Iniciaremos esta sección recordando el concepto de derivada de una función real f de una sola variable x, definida a continuación:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

siempre que el límite existe. Además, se dice que la función $y = f(x)$ es diferenciable en $a \in Domf$ si y sólo si $f'(a)$ existe (es un valor real), donde $f'(a)$ representa la razón de cambio instantáneo de y con respecto a x; o bien, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$. En cuanto a la notación de la derivada de f con respecto a x, $f'(x)$, que se lee "f prima de x", también se puede escribir de la siguiente manera: $\frac{df}{dx}, \frac{dy}{dx}$.

A continuación, se establecen algunas de las reglas básicas de derivación de las funciones reales de una variable, con la finalidad de ocuparlas más adelante en este capítulo.

1. $\frac{d}{dx}[c] = 0$, donde c es un número real

2. $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$, donde n es un número racional

3. $\frac{d}{dx}[cu] = c\frac{du}{dx}$, donde c es un número real

4. $\frac{d}{dx}[u + v] = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

5. $\frac{d}{dx}[u - v] = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$

6. $\frac{d}{dx}[uv] = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

7. $\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$, si $v \neq 0$

8. $\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$, donde n es un número racional

9. $\frac{d}{dx}[senu] = cos\, u\frac{du}{dx}$

10. $\frac{d}{dx}[cos\, u] = -senu\frac{du}{dx}$

11. $\frac{d}{dx}[tan\, u] = sec^2\, u\frac{du}{dx}$

12. $\frac{d}{dx}[cot\, u] = -\, csc^2\, u\frac{du}{dx}$

13. $\frac{d}{dx}[sec\, u] = sec\, u\, tan\, u\frac{du}{dx}$

14. $\frac{d}{dx}[csc\, u] = -\, csc\, u\, cot\, u\frac{du}{dx}$

15. $\frac{d}{dx}[e^u] = e^u\frac{du}{dx}$

16. $\frac{d}{dx}[ln\, u] = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

Donde u y v son dos funciones diferenciables en x.

3.1.1 Definición de derivada parcial

Para una función f de valor real en n variables, $x_1, x_2, \dots, x_n$, su derivada parcial respecto a la k *-ésima* variable está definida por

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,x_2,\dots,x_k+h,\dots,x_n) - f(x_1,x_2,\dots,x_n)}{h}$$

siempre que el límite existe; es decir, $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ es la derivada de f respecto a la variable x_k, manteniendo fijas las otras variables. De este modo, si f es una función real en las variables x y y, sus derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}$$

siempre que los límites existen. Más aún, para un punto fijo $(a, b) \in Domf$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

Equivalentemente, tomando $x = a + h$ y $y = b + h$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{x\to a}\frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}$$

siempre que los límites existen.

Observación

En la práctica, si f es una función de n variables, $x_1, x_2, \dots, x_n$, la derivada parcial de f con respecto a x_k, con $k = 1,2,\dots,n$, se calcula derivando a f respecto a la variable x_k y tomando a las demás variables (distintas de x_k) como constantes, aplicando las reglas de derivación para funciones reales que dependen de una sola variable.

En el caso particular en que f es una función real de dos variables, x y y, la derivada parcial de f con respecto a x, $\frac{\partial f}{\partial x}$, se calcula derivando a f respecto a la variable x y tomando a y como una constante. Análogamente, la derivada parcial de f con respecto a y, $\frac{\partial f}{\partial y}$, se calcula derivando a f respecto a la variable y y tomando a x como una constante.

En resumen, la derivada parcial de una función real en varias variables con respecto a alguna de ellas es la derivada ordinaria de la función respecto a dicha variable, si se considera a las demás variables como constantes.

3.1.2 Ejemplos de cómo calcular las derivadas parciales usando la definición

1. Calcula $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, si $f(x,y) = x + y$.

Solución:

La derivada parcial de f con respecto de x está definida por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

Donde:

$$\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \frac{x+h+y-(x+y)}{h} = \frac{x+h+y-x-y}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

De aquí que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

Es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Análogamente, como la derivada parcial de f con respecto de y está definida por:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

Donde:

$$\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}=\frac{x+y+h-(x+y)}{h}=\frac{x+y+h-x-y}{h}=\frac{h}{h}=1$$

Se tiene que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

Es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=1$$

para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

En resumen, las derivadas parciales de f se calculan como se muestra a continuación:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$
por definición de derivada parcial de f con respecto de x

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[(x+h)+y]-[x+y]}{h}$$
considerando que $f(x+h,y)=(x+h)+y$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h+y-x-y}{h}$$
efectuando las operaciones en el numerador

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}$$
efectuando las operaciones en el numerador

$$=\lim_{h\to 0}1$$
efectuando la división

$$=1$$
por la propiedad 2.1.4(i)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$
por definición de derivada parcial de f con respecto de y

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[x+(y+h)]-[x+y]}{h}$$
considerando que $f(x,y+h)=x+(y+h)$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+y+h-x-y}{h}$$
efectuando las operaciones en el numerador

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}$$
efectuando las operaciones en el numerador

$= \lim_{h \to 0} 1$
efectuando la división

$= 1$
por la propiedad 2.1.4(i)

Por lo tanto: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Por otro lado, las derivadas parciales de la función $f(x, y) = x + y$ se pueden calcular más fácilmente considerando lo indicado en la observación anterior, esto es, cambiando la derivada parcial por una derivada ordinaria como se muestra a continuación.

Derivando parcialmente a la función f respecto de la variable x, todas las expresiones que no dependen de x serán tomadas como si fueran constantes (números reales); de este modo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{d}{dx}[x + y] = \frac{d}{dx}[x] + \frac{d}{dx}[y] = 1 + 0 = 1$$

Donde se utilizaron las reglas de derivación: $\frac{d}{dx}[u + v] = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$, $\frac{dx}{dx} = 1$ y $\frac{d}{dx}[c] = 0$.

Derivando ahora parcialmente a la función f respecto de la variable y, todas las expresiones que no dependen de y serán tomadas como si fueran constantes (números reales); por lo que:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{d}{dy}[x + y] = \frac{d}{dy}[x] + \frac{d}{dy}[y] = 0 + 1 = 1$$

Donde se utilizaron las reglas de derivación: $\frac{d}{dy}[u + v] = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dy}$, $\frac{dy}{dy} = 1$ y $\frac{d}{dy}[c] = 0$.

2. Si $f(x, y) = xy$, halla $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Solución:

La derivada parcial de f con respecto de x está definida por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

Donde:

$$\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{[(x+h)y] - [xy]}{h} = \frac{xy + hy - xy}{h} = \frac{hy}{h} = y$$

Luego:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \to 0} y = y$$

Análogamente, como la derivada parcial de f con respecto de y está definida por:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

Donde:

$\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = \frac{[x(y+h)]-[xy]}{h} = \frac{xy+xh-xy}{h} = \frac{xh}{h} = x$

Se obtiene que:

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = \lim_{h \to 0} x = x$

En resumen, las derivadas parciales de f se calculan como se muestra a continuación:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$
por definición de derivada parcial de f con respecto de x

$= \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)y]-[xy]}{h}$
considerando que $f(x+h,y) = (x+h)y$

$= \lim_{h \to 0} \frac{xy+hy-xy}{h}$
efectuando las operaciones en el numerador

$= \lim_{h \to 0} \frac{hy}{h}$
efectuando las operaciones en el numerador

$= \lim_{h \to 0} y$
simplificando

$= y$
por la propiedad 2.1.4(i)

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$
por definición de derivada parcial de f con respecto de y

$= \lim_{h \to 0} \frac{[x(y+h)]-[xy]}{h}$
considerando que $f(x,y+h) = x(y+h)$

$= \lim_{h \to 0} \frac{xy+xh-xy}{h}$
efectuando las operaciones en el numerador

$= \lim_{h \to 0} \frac{xh}{h}$
efectuando las operaciones en el numerador

$= \lim_{h \to 0} x$
simplificando

$= x$
por la propiedad 2.1.4(i)

Es decir: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Por otro lado, usando las Reglas de Derivación:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dx}[xy] = x\frac{d}{dx}[y] + y\frac{d}{dx}[x] = x(0) + y(1) = y$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dy}[xy] = x\frac{d}{dy}[y] + y\frac{d}{dy}[x] = x(1) + y(0) = x$

Donde se utilizaron las reglas: $\frac{d}{dx}[uv] = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$, $\frac{dx}{dx} = 1$ y $\frac{d}{dx}[c] = 0$.

O bien:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dx}[xy] = y\frac{d}{dx}[x] = y(1) = y$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dy}[xy] = x\frac{d}{dy}[y] = x(1) = x$

Donde se utilizaron las reglas: $\frac{d}{dx}[cu] = c\frac{du}{dx}$ y $\frac{dx}{dx} = 1$.

3.1.3 Ejemplos de cómo calcular las derivadas parciales usando las reglas o fórmulas de derivación

3. Calcula las derivadas parciales de $f(x,y) = x^2y^3 + y^6$.

Solución:

En este ejemplo se aplicarán directamente las reglas de derivación para calcular las derivadas parciales de la función indicada. Si primero se deriva parcialmente respecto de la variable x, todas las expresiones que no dependen de x serán tomadas como si fueran constantes; de modo que:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dx}[x^2y^3 + y^6]$
cambiando la notación de derivada parcial a derivada ordinaria, considerando que se va a derivar con respecto de x a la función $f(x,y) = x^2y^3 + y^6$

$= \frac{d}{dx}[x^2y^3] + \frac{d}{dx}[y^6]$
aplicando $\frac{d}{dx}[u+v] = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

$= y^3\frac{d}{dx}[x^2] + \frac{d}{dx}[y^6]$
aplicando $\frac{d}{dx}[cu] = c\frac{du}{dx}$

$= y^3(2x) + 0$
aplicando $\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$ *y* $\frac{d}{dx}[c] = 0$

$= 2xy^3$
ordenando los factores

Es decir: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Nótese que, en este caso, las expresiones y^3 y y^6 son consideradas como constantes, puesto que se derivó con respecto a la variable x.

Si ahora se deriva parcialmente respecto de la variable y, todas las expresiones que no dependen de y serán tomadas como si fueran constantes; de modo que:

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dy}[x^2y^3 + y^6]$
cambiando la notación de derivada parcial a derivada ordinaria, considerando que se va a derivar con respecto de y a la función $f(x,y) = x^2y^3 + y^6$

$= \frac{d}{dy}[x^2y^3] + \frac{d}{dy}[y^6]$
aplicando $\frac{d}{dy}[u+v] = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dy}$

$= x^2\frac{d}{dy}[y^3] + \frac{d}{dy}[y^6]$
aplicando $\frac{d}{dy}[cu] = c\frac{du}{dy}$

$= x^2(3y^2) + 6y^5$
aplicando $\frac{d}{dy}[u^n] = nu^{n-1}\frac{du}{dy}$

$= 3x^2y^2 + 6y^5$
ordenando los factores

Esto es: $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2 + 6y^5$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Donde ahora la expresión x^2 es considerada como una constante, debido a que se derivó con respecto a la variable y. En general, para calcular ambas derivadas parciales, se utilizaron las reglas de derivación siguientes:

$\frac{d}{dx}[u+v] = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$, $\frac{d}{dx}[cu] = c\frac{du}{dx}$, $\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$ y $\frac{d}{dx}[c] = 0$

enunciadas para cuando las funciones u y v dependen de la variable x.

4. Calcula las derivadas parciales de $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Solución:

Nuevamente, se aplicarán las reglas de derivación para calcular las derivadas parciales. Derivando parcialmente a la función f respecto de la variable x, todas las expresiones que no dependen de x serán tomadas como si fueran constantes; de este modo:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dx}\left[\frac{xy}{x^2+y^2}\right]$
cambiando la notación de derivada parcial a derivada ordinaria, considerando que se va a derivar con respecto de x a la función $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

$= \frac{(x^2+y^2)\frac{d}{dx}[xy] - xy\frac{d}{dx}[x^2+y^2]}{(x^2+y^2)^2}$
aplicando $\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

$= \frac{(x^2+y^2)\left(y\frac{d}{dx}[x]\right) - xy\left(\frac{d}{dx}[x^2] + \frac{d}{dx}[y^2]\right)}{(x^2+y^2)^2}$
aplicando $\frac{d}{dx}[cu] = c\frac{du}{dx}$ *y* $\frac{d}{dx}[u+v] = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

$= \frac{(x^2+y^2)(y)-xy(2x+0)}{(x^2+y^2)^2}$
aplicando $\frac{dx}{dx} = 1, \ \ \frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}\frac{du}{dx} \ \ y \ \ \frac{d}{dx}[c] = 0$

$= \frac{x^2y+y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}$
efectuando las operaciones en el numerador

$= \frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}$
efectuando las operaciones en el numerador

Es decir: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$.

Donde en el proceso de derivación, las expresiones y y y^2 son consideradas como constantes. Derivando ahora parcialmente a la función f respecto de la variable y, todas las expresiones que no dependen de y serán tomadas como si fueran constantes; por lo que:

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dy}\left[\frac{xy}{x^2+y^2}\right]$
cambiando la notación de derivada parcial a derivada ordinaria, considerando que se va a derivar con respecto de y *a la función* $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

$= \frac{(x^2+y^2)\frac{d}{dy}[xy]-xy\frac{d}{dy}[x^2+y^2]}{(x^2+y^2)^2}$
aplicando $\frac{d}{dy}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{v\frac{du}{dy}-u\frac{dv}{dy}}{v^2}$

$= \frac{(x^2+y^2)\left(x\frac{d}{dy}[y]\right)-xy\left(\frac{d}{dy}[x^2]+\frac{d}{dy}[y^2]\right)}{(x^2+y^2)^2}$
aplicando $\frac{d}{dy}[cu] = c\frac{du}{dy} \ \ y \ \ \frac{d}{dy}[u+v] = \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dy}$

$= \frac{(x^2+y^2)(x)-xy(0+2y)}{(x^2+y^2)^2}$
aplicando $\frac{dy}{dy} = 1, \ \frac{d}{dy}[u^n] = nu^{n-1}\frac{du}{dy} \ \ y \ \ \frac{d}{dy}[c] = 0$

$= \frac{x^3+xy^2-2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$
efectuando las operaciones en el numerador

$= \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}$
efectuando las operaciones en el numerador

Esto es: $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$.

Donde ahora las expresiones x y x^2 son consideradas como constantes. En general, se utilizaron las siguientes reglas de derivación:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}, \ \frac{d}{dx}[cu] = c\frac{du}{dx}, \ \frac{d}{dx}[u+v] = \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}, \ \frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}\frac{du}{dx} \text{ y } \frac{d}{dx}[c] = 0$$

enunciadas para cuando las funciones u y v dependen de la variable x.

5. Calcula las derivadas parciales de $f(x,y) = \sqrt{(x^2 - y^2)^3}$.

Solución:

En este caso, conviene primero reescribir la función de la siguiente manera:

$$f(x,y) = \sqrt{(x^2 - y^2)^3} = (x^2 - y^2)^{3/2}$$

para derivar ocupando la regla: $\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$, donde $u = x^2 - y^2$ y $n = \frac{3}{2}$.

Derivando parcialmente a la función f respecto de la variable x, todas las expresiones que no dependen de x serán tomadas como si fueran constantes; por lo que, en este caso, la expresión y^2 será considerada como una constante.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dx}\left[(x^2 - y^2)^{3/2}\right]$$
cambiando la notación de derivada parcial a derivada ordinaria, considerando que se va a derivar con respecto de x a la función $f(x,y) = (x^2 - y^2)^{3/2}$

$$= \frac{3}{2}(x^2 - y^2)^{1/2}\frac{d}{dx}[x^2 - y^2]$$
aplicando $\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$

$$= \frac{3}{2}(x^2 - y^2)^{1/2}\left(\frac{d}{dx}[x^2] - \frac{d}{dx}[y^2]\right)$$
aplicando $\frac{d}{dx}[u - v] = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$

$$= \frac{3}{2}(x^2 - y^2)^{1/2}(2x - 0)$$
aplicando $\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$ y $\frac{d}{dx}[c] = 0$

$$= 3x\sqrt{x^2 - y^2}$$
simplificando y acomodando los factores

Es decir: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x\sqrt{x^2 - y^2}$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^2 - y^2 \geq 0$.

Derivando parcialmente a la función f respecto de la variable y, todas las expresiones que no dependen de y serán tomadas como si fueran constantes; por lo que, en este caso, la expresión x^2 será considerada como una constante.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dy}\left[(x^2 - y^2)^{3/2}\right]$$
cambiando la notación de derivada parcial a derivada ordinaria, considerando que se va a derivar con respecto de y a la función $f(x,y) = (x^2 - y^2)^{3/2}$

$$= \frac{3}{2}(x^2 - y^2)^{1/2}\frac{d}{dy}[x^2 - y^2]$$
aplicando $\frac{d}{dy}[u^n] = nu^{n-1}\frac{du}{dy}$

$$= \frac{3}{2}(x^2 - y^2)^{1/2}\left(\frac{d}{dy}[x^2] - \frac{d}{dy}[y^2]\right)$$
aplicando $\frac{d}{dy}[u - v] = \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dy}$

$$= \frac{3}{2}(x^2 - y^2)^{1/2}(0 - 2y)$$
aplicando $\frac{d}{dy}[u^n] = nu^{n-1}\frac{du}{dy}$ y $\frac{d}{dy}[c] = 0$

$= -3y\sqrt{x^2 - y^2}$
simplificando y acomodando los factores

Es decir: $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3y\sqrt{x^2 - y^2}$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^2 - y^2 \geq 0$.

6. Calcula las derivadas parciales de $f(x, y) = senxcosy$.

Solución:

Si primero se deriva parcialmente a la función f respecto de la variable x, todas las expresiones que no dependen de x serán tomadas como si fueran constantes; por lo que, en este caso, la expresión $cosy$ será considerada como una constante.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{d}{dx}[senxcosy]$

cambiando la notación de derivada parcial a derivada ordinaria, considerando que se va a derivar con respecto de x a la función $f(x, y) = senx\, cos\, y$

$= cos\, y \frac{d}{dx}[senx]$
aplicando $\frac{d}{dx}[cu] = c\frac{du}{dx}$

$= cos\, y\, cos\, x$
aplicando $\frac{d}{dx}[senu] = cosu\frac{du}{dx}$

$= cos\, x\, cos\, y$
acomodando los factores

Es decir: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = cos\, x\, cos\, y$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Si ahora se deriva parcialmente a la función f respecto de la variable y, todas las expresiones que no dependen de y serán tomadas como si fueran constantes; por lo que, en este caso, la expresión $senx$ será considerada como una constante.

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{d}{dy}[senxcosy]$

cambiando la notación de derivada parcial a derivada ordinaria, considerando que se va a derivar con respecto de y a la función $f(x, y) = senx\, cos\, y$

$= senx \frac{d}{dy}[cos\, y]$
aplicando $\frac{d}{dy}[cu] = c\frac{du}{dy}$

$= senx(-seny)$
aplicando $\frac{d}{dy}[cosu] = -senu\frac{du}{dy}$

$= -senxseny$
acomodando los factores

Es decir: $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -senxseny$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Alternativamente, se pueden calcular las derivadas parciales mediante la regla para derivar un producto de funciones, como se muestra a continuación.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{d}{dx}[senxcosy]$

cambiando la notación de derivada parcial a derivada ordinaria, considerando que se va a derivar con respecto de x a la función $f(x,y)=senx\cos y$

$=senx\frac{d}{dx}[cosy]+cosy\frac{d}{dx}[senx]$
aplicando $\frac{d}{dx}[uv]=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$

$=senx(0)+cosy(cosx)$
aplicando $\frac{d}{dx}[c]=0$ *y* $\frac{d}{dx}[senu]=cosu\frac{du}{dx}$

$=0+cosycosx$
efectuando las multiplicaciones

$=cosxcosy$
acomodando los factores

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{d}{dy}[senxcosy]$
cambiando la notación de derivada parcial a derivada ordinaria, considerando que se va a derivar con respecto de y a la función $f(x,y)=senx\cos y$

$=senx\frac{d}{dy}[cosy]+cosy\frac{d}{dy}[senx]$
aplicando $\frac{d}{dy}[uv]=u\frac{dv}{dy}+v\frac{du}{dy}$

$=senx(-seny)+cosy(0)$
aplicando $\frac{d}{dy}[cosu]=-senu\frac{du}{dx}$ *y* $\frac{d}{dy}[c]=0$

$=-senxseny+0$
efectuando las multiplicaciones

$=-senxseny$
efectuando la suma

7. Calcula las derivadas parciales de $f(x,y)=e^{x^3-3xy^2}$.

Solución:

En este caso, para calcular ambas derivadas parciales, se inicia aplicando la regla de derivación siguiente:

$\frac{d}{dx}[e^u]=e^u\frac{du}{dx}$

donde $u=x^3-3xy^2$, de modo que:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{d}{dx}\left[e^{x^3-3xy^2}\right]$

$=e^{x^3-3xy^2}\frac{d}{dx}[x^3-3xy^2]$
$=e^{x^3-3xy^2}\left(\frac{d}{dx}[x^3]-3y^2\frac{d}{dx}[x]\right)$

$=e^{x^3-3xy^2}\left(3x^2-3y^2(1)\right)$

$= e^{x^3-3xy^2}(3x^2 - 3y^2)$

$= (3x^2 - 3y^2)e^{x^3-3xy^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dy}\left[e^{x^3-3xy^2}\right]$

$= e^{x^3-3xy^2}\frac{d}{dy}[x^3 - 3xy^2]$

$= e^{x^3-3xy^2}\left(\frac{d}{dy}[x^3] - 3x\frac{d}{dy}[y^2]\right)$

$= e^{x^3-3xy^2}\big(0 - 3x(2y)\big)$

$= e^{x^3-3xy^2}(-6xy)$

$= -6xye^{x^3-3xy^2}$

Es decir:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (3x^2 - 3y^2)e^{x^3-3xy^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -6xye^{x^3-3xy^2}$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

8. Si $f(x,y) = e^{x^2+y^2}sen(x-y)$, halla $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Solución:

Para calcular ambas derivadas parciales, se inicia aplicando la regla de derivación siguiente:

$\frac{d}{dx}[uv] = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

De modo que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dx}\left[e^{x^2+y^2}sen(x-y)\right]$$

$= e^{x^2+y^2}\frac{d}{dx}[sen(x-y)] + sen(x-y)\frac{d}{dx}\left[e^{x^2+y^2}\right]$

$= e^{x^2+y^2}cos(x-y)\frac{d}{dx}[x-y] + sen(x-y)e^{x^2+y^2}\frac{d}{dx}[x^2+y^2]$

$= e^{x^2+y^2}cos(x-y)\left(\frac{d}{dx}[x] - \frac{d}{dx}[y]\right) + sen(x-y)e^{x^2+y^2}\left(\frac{d}{dx}[x^2] + \frac{d}{dx}[y^2]\right)$

$= e^{x^2+y^2}cos(x-y)(1-0) + sen(x-y)e^{x^2+y^2}(2x+0)$

$= e^{x^2+y^2}cos(x-y) + 2xe^{x^2+y^2}sen(x-y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dy}\left[e^{x^2+y^2}sen(x-y)\right]$

$= e^{x^2+y^2}\frac{d}{dy}[sen(x-y)] + sen(x-y)\frac{d}{dy}\left[e^{x^2+y^2}\right]$

$= e^{x^2+y^2} cos(x-y) \frac{d}{dy}[x-y] + sen(x-y)e^{x^2+y^2} \frac{d}{dy}[x^2+y^2]$

$= e^{x^2+y^2} cos(x-y) \left(\frac{d}{dy}[x] - \frac{d}{dy}[y]\right) + sen(x-y)e^{x^2+y^2} \left(\frac{d}{dy}[x^2] + \frac{d}{dy}[y^2]\right)$

$= e^{x^2+y^2} cos(x-y)(0-1) + sen(x-y)e^{x^2+y^2}(0+2y)$

$= -e^{x^2+y^2} cos(x-y) + 2ye^{x^2+y^2} sen(x-y)$

Es decir:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x^2+y^2} cos(x-y) + 2xe^{x^2+y^2} sen(x-y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^{x^2+y^2} cos(x-y) + 2ye^{x^2+y^2} sen(x-y)$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

9. Si $f(x,y) = ln(x^2y - 3xy^2)$, halla $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Solución:

Aplicando la siguiente regla de derivación:

$\frac{d}{dx}[lnu] = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$

donde $u = x^2y - 3xy^2$, se tiene que:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x^2y-3xy^2} \cdot \frac{d}{dx}[x^2y - 3xy^2]$

$= \frac{1}{x^2y-3xy^2}\left(\frac{d}{dx}[x^2y] - \frac{d}{dx}[3xy^2]\right)$

$= \frac{1}{x^2y-3xy^2}\left(y\frac{d}{dx}[x^2] - 3y^2\frac{d}{dx}[x]\right)$

$= \frac{1}{x^2y-3xy^2}[y(2x) - 3y^2(1)]$

$= \frac{1}{x^2y-3xy^2}[2xy - 3y^2]$

$= \frac{2xy-3y^2}{x^2y-3xy^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x^2y-3xy^2} \cdot \frac{d}{dy}[x^2y - 3xy^2]$

$= \frac{1}{x^2y-3xy^2}\left(\frac{d}{dy}[x^2y] - \frac{d}{dy}[3xy^2]\right)$

$= \frac{1}{x^2y-3xy^2}\left(x^2\frac{d}{dy}[y] - 3x\frac{d}{dy}[y^2]\right)$

$= \frac{1}{x^2y-3xy^2}[x^2(1) - 3x(2y)]$

$= \frac{1}{x^2y-3xy^2}[x^2 - 6xy]$

$= \frac{x^2-6xy}{x^2y-3xy^2}$

Es decir:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy-3y^2}{x^2y-3xy^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2-6xy}{x^2y-3xy^2}$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^2y - 3xy^2 \neq 0$.

10. Sea $f(x,y) = x^{1/3}y^{1/3}$. Halla $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. (Adaptado a partir de Marsden y Tromba, 1991, p. 121).

Solución:

Usando las reglas de derivación, se tiene lo siguiente:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3}x^{-2/3}y^{1/3} = \frac{y^{1/3}}{3x^{2/3}} = \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{y}{x^2}}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{3}x^{1/3}y^{-2/3} = \frac{x^{1/3}}{3y^{2/3}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}$

para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x \neq 0$ y $y \neq 0$; es decir, no podemos calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ evaluando en $(0,0)$ las funciones anteriores. Sin embargo, utilizando la definición de derivada parcial en un punto fijo, se obtiene que:

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{x^{1/3}(0)^{1/3}-0}{x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{0}{x}$

$= \lim_{x\to 0}0$

$= 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}$

$= \lim_{y\to 0}\frac{(0)^{1/3}y^{1/3}-0}{y}$

$= \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}$

$= \lim_{y\to 0}\frac{0}{y}$

$= \lim_{y\to 0}0$

$= 0$

De este modo: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

11. Calcula las derivadas parciales de $f(x, y, z) = e^{xy} - senz$.

Solución:

Aplicando las reglas de derivación, se tiene que:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{d}{dx}[e^{xy} - senz]$

$= \frac{d}{dx}[e^{xy}] - \frac{d}{dx}[senz]$

$= e^{xy}\frac{d}{dx}[xy] - 0$

$= e^{xy}(y)$

$= ye^{xy}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{d}{dy}[e^{xy} - senz]$

$= \frac{d}{dy}[e^{xy}] - \frac{d}{dy}[senz]$

$= e^{xy}\frac{d}{dy}[xy] - 0$

$= e^{xy}(x)$

$= xe^{xy}$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{d}{dz}[e^{xy} - senz]$

$= \frac{d}{dz}[e^{xy}] - \frac{d}{dz}[senz]$

$= 0 - cosz\frac{d}{dz}[z]$

$= -cosz(1)$

$= -cosz$

Es decir:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = ye^{xy}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xe^{xy}$

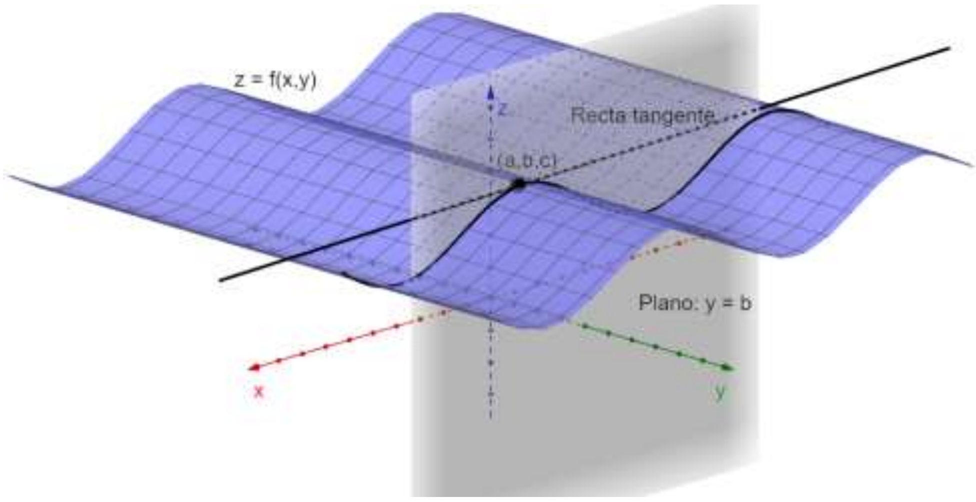
$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\cos z$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

3.1.4 Interpretación geométrica de las derivadas parciales de funciones de la forma $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Sea f una función real en las variables x y y. Entonces la derivada parcial de f con respecto a x en el punto (a, b), $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, representa el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección (traza) entre la gráfica de f (superficie de ecuación $z = f(x, y)$) y el plano $y = b$, en el punto (a, b, c) con $c = f(a, b)$. Ver la figura 3.1.

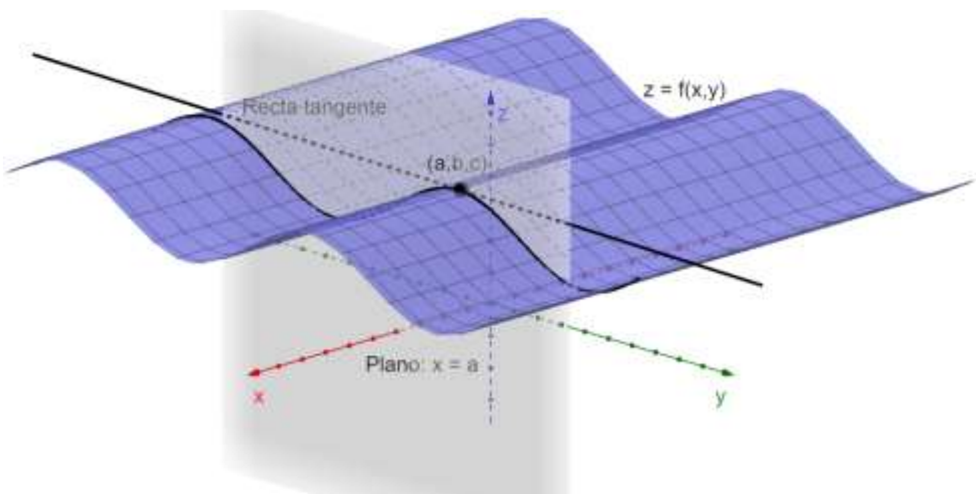
Figura 3.1 Interpretación geométrica de $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

Análogamente, la derivada parcial de f con respecto a y en el punto (a, b), $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, representa el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección (traza) entre la gráfica de f (superficie de ecuación $z = f(x, y)$) y el plano $x = a$, en el punto (a, b, c) con $c = f(a, b)$. Ver la figura 3.2.

Figura 3.2 Interpretación geométrica de $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

Dicho de otro modo, las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en el punto (a, b) dan las pendientes de la superficie $z = f(x, y)$ en las direcciones x y y.

Ejemplos

1. Considera la superficie $z = 5 - 2x^2 - y^2$. Sean C_1 la curva de intersección de la superficie con el plano $y = 1$ y C_2 la curva de intersección de la superficie con el plano $x = 1$.

(a) Determina la pendiente de la recta tangente a la curva C_1 en el punto $(1,1,2)$.

(b) Calcula la pendiente de la recta tangente a la curva C_2 en el punto $(1,1,2)$.

(Adaptado a partir de Stewart, 1999, p. 932).

Solución:

En este caso, $f(x, y) = 5 - 2x^2 - y^2$, de donde $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -4x$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Luego:

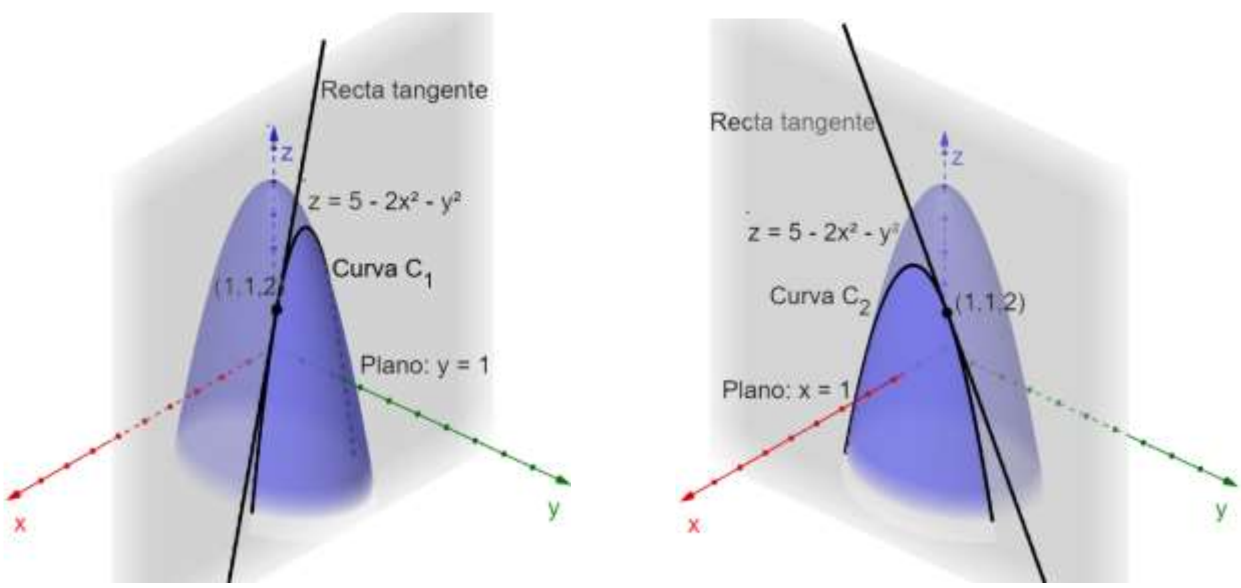
(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -4(1) = -4$ es la pendiente de la recta tangente a la curva C_1 en el punto $(1,1,2)$, donde C_1 es la parábola de ecuación $z = 4 - 2x^2$ que se obtiene de sustituir $y = 1$ en la ecuación $z = 5 - 2x^2 - y^2$.

(b) $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -2(1) = -2$ es la pendiente de la recta tangente a la curva C_2 en el punto $(1,1,2)$, donde C_2 es la parábola de ecuación $z = 3 - y^2$ que se obtiene de sustituir $x = 1$ en la ecuación $z = 5 - 2x^2 - y^2$.

Ver la figura 3.3(a)-(b).

Figura 3.3(a)-(b) Gráfica de $z = 5 - 2x^2 - y^2$

(a) C_1 es la parábola $z = 4 - 2x^2$ (b) C_2 es la parábola $z = 3 - y^2$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

2. Halla las pendientes de la superficie $z = 4 - x^2 - y^2$ en el punto $(1, -1, 2)$, en la dirección de x y en la dirección de y. (Adaptado a partir de Larson *et. al.*, 1996, p. 1128).

Solución:

Como $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = -2$ es la pendiente en la dirección de x y $\frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) = 2$ es la pendiente en la dirección de y.

3.1.5 Interpretación física de las derivadas parciales de funciones de la forma $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \to \mathbb{R}$

Si f es una función real en las variables x y y, entonces la derivada parcial de f con respecto a x en el punto (a,b), $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, proporciona la tasa de variación (o razón de cambio) instantánea, en (a,b), de $f(x,y)$ por unidad de variación de x (x varía y y se mantiene fija en b). De manera semejante, la derivada parcial de f con respecto a y en el punto (a,b), $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$, proporciona la tasa de variación (o razón de cambio) instantánea, en (a,b), de $f(x,y)$ por unidad de variación de y (y varía y x se mantiene fija en a).

Ejemplos

1. La temperatura, en grados Celsius, en cualquier punto (x,y) de una placa metálica está dada por $T(x,y) = 3 + 5x^2 + 2y^3$. ¿Cuál es la razón de cambio de la temperatura respecto a la distancia, en pies, recorrida a lo largo de la placa en la dirección positiva del eje y, en el punto $(2,1)$? (Adaptado a partir de Leithold, 1998, p. 954).

Solución:

Como $\frac{\partial T}{\partial y}(x,y) = 6y^2$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, entonces la razón de cambio de la temperatura T respecto a la distancia en la dirección positiva del eje y, en el punto $(2,1)$, está dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial y}(2,1) = 6(1)^2 = 6\ (°C/ft)$$

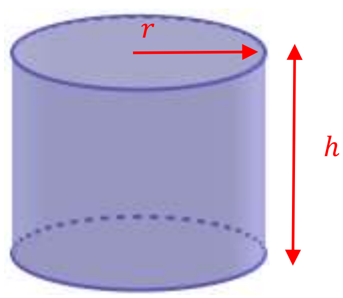
Es decir, la temperatura aumenta a una razón de 6 $°C$ por ft de distancia recorrida en la dirección positiva del eje y, en el punto $(2,1)$.

2. Un cilindro circular recto tiene 6 cm de radio y 35 cm de altura. Halla la razón de cambio del volumen del cilindro respecto del radio y respecto de la altura.

Solución:

Como el volumen de un cilindro circular recto se obtiene de multiplicar el área de la base por la altura, la función que representa a dicho volumen es $V(h,r) = \pi r^2 h$, donde r es el radio y h la altura. Ver la figura 3.4.

Figura 3.4 Cilindro circular recto



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

En este caso, $r = 6\ cm$ y $h = 35\ cm$. Como $\frac{\partial V}{\partial r}(h,r) = 2\pi rh$, para todo $(h,r) \in \mathbb{R}^2$ donde $h > 0$ y $r > 0$, entonces la razón de cambio del volumen respecto del radio está dada por:

$$\frac{\partial V}{\partial r}(35,6) = 2\pi(6)(35) = 420\pi\ (cm^3/cm)$$

Esto es, el volumen crece a una razón de $420\pi\ cm^3$ por cm de radio.

Por otro lado, como $\frac{\partial V}{\partial h}(h,r) = \pi r^2$, para todo $(h,r) \in \mathbb{R}^2$ donde $h > 0$ y $r > 0$, entonces la razón de cambio del volumen respecto de la altura está dada por:

$$\frac{\partial V}{\partial h}(35{,}6) = \pi(6)^2 = 36\pi\ (cm^3/cm)$$

Esto es, el volumen crece a una razón de $36\pi\ cm^3$ por cm de altura.

3. De acuerdo con la *Ley de los Gases Ideales*, la presión P, la temperatura T y el volumen V de un gas confinado, se relacionan mediante la fórmula $PV = kT$, donde k es cierta constante. Supongamos que el volumen de un gas de cierto recipiente es de $15\ L$ (litros) y que la temperatura es de $310\ K$ (Kelvin), con $k = 0.6$.

(a) Calcula la tasa de variación instantánea de P por unidad de variación de T, si V permanece fija en $15\ L$.

(b) Calcula la tasa de variación instantánea de V por unidad de variación de P, si T permanece fija en $310\ K$.

(Adaptado a partir de Leithold, 1998, p. 947).

Nota: En este ejemplo, la presión se mide en atmósferas atm.

Solución:

Los datos con los que se cuentan son: $V = 15\ L$, $T = 310\ K$ y $k = 0.6$.

(a) Por la Ley de los Gases Ideales, $PV = kT$, se puede tomar la presión P como una función de la temperatura T y el volumen V; es decir, $P(T,V) = \frac{kT}{V}$ o sólo $P = \frac{kT}{V}$.

Como $\frac{\partial P}{\partial T}(T,V) = \frac{k}{V}$, entonces la tasa de variación instantánea de P por unidad de variación de T, si V permanece fija en $15\ L$, está dada por:

$$\frac{\partial P}{\partial T}(310{,}15) = \frac{0.6}{15} = 0.04\ (atm/K)$$

Por lo tanto: La presión varía a una tasa de $0.04\ atm$ por K de temperatura. Equivalentemente, como el resultado fue positivo, $0.04 > 0$, se dice que la presión aumenta o crece a una tasa de $0.04\ atm$ por K de temperatura.

Nótese que:

$$\frac{\partial P}{\partial T}(T,V) = \frac{d}{dT}\left[\frac{kT}{V}\right] = \frac{d}{dT}\left[\frac{k}{V}T\right] = \frac{k}{V}\frac{d}{dT}[T] = \frac{k}{V}$$

(b) Por la Ley de los Gases Ideales, $PV = kT$, también se puede tomar el volumen V como una función de la presión P y la temperatura T; es decir, $V(P,T) = \frac{kT}{P}$ o sólo $V = \frac{kT}{P}$.

Como $\frac{\partial V}{\partial P}(P,T) = -\frac{kT}{P^2}$, la tasa de variación instantánea de V por unidad de variación de P, si T permanece fija en $310\ K$, está dada por:

$$\frac{\partial V}{\partial P}(12.4{,}310) = -\frac{(0.6)(310)}{(12.4)^2} = -1.2096\ (L/atm)$$

Donde: $P = \frac{kT}{V} = \frac{(0.6)(310)}{15} = 12.4$

Por lo tanto: El volumen varía a una tasa de $-1.2096\ L$ por atm de presión. Equivalentemente, como el resultado fue negativo, $-1.2096 < 0$, se dice que el volumen disminuye o decrece a una tasa de $1.2096\ L$ por atm de presión.

Nótese que:

$$\frac{\partial V}{\partial P} = \frac{d}{dP}\left[\frac{kT}{P}\right] = \frac{d}{dP}\left[kT\frac{1}{P}\right] = kT\frac{d}{dP}\left[\frac{1}{P}\right] = kT\frac{d}{dP}[P^{-1}] = kT\left(-P^{-2}\frac{dP}{dP}\right) = kT\left(-\frac{1}{P^2}\right)$$

3.2 Matriz Jacobiana y diferenciabilidad

En esta sección se extiende el concepto de derivada para funciones vectoriales de varias variables, como una matriz conformada por las derivadas parciales de las funciones componentes que definen a la función vectorial. Así mismo, se incluye un criterio que permite determinar cuándo una función de varias variables, de valores reales o vectoriales, es diferenciable, a partir de la continuidad de sus derivadas parciales. Se iniciará estableciendo la definición de una matriz en general, con la finalidad de facilitar el concepto de matriz Jacobiana que se estudiará en la sección 3.2.1

Una *matriz* $A\ m \times n$ es un arreglo rectangular de mn números (reales o complejos) distribuidos en un orden de m filas y n columnas de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

donde a_{ij} denota el número que aparece en la fila i y la columna j, con $i = 1,2,\dots,m$ y $j = 1,2,\dots,n$, y se conoce como la entrada, componente o elemento de la matriz. Además, se dice que la matriz A tiene dimensión $m \times n$. (Grossman y Flores, 2012).

Considerando las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix},\ B = [2 \quad 1 \quad 0 \quad -3],\ C = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \pi & e \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ G = [4].$$

Podemos concluir que:

a) La matriz A tiene 3 filas y 2 columnas, por lo que su dimensión es 3×2.

b) La matriz B tiene 1 fila y 4 columnas, por lo que tiene dimensión 1×4. A este tipo de matrices con una sola fila se le conoce como matriz fila.

c) La matriz C tiene 3 filas y 3 columnas, es decir, tiene dimensión 3×3. C es una matriz cuadrada, por coincidir el número de filas con el número de columnas.

d) La matriz D tiene 2 filas y 1 columna, así que su dimensión es 2×1. A este tipo de matrices con una sola columna se le conoce como matriz columna.

e) La matriz E tiene dimensión 2×3 y es una matriz nula o matriz cero.

f) La matriz F es una matriz cuadrada de dimensión 2×2 que es una matriz identidad.

g) La matriz G 1×1 es una matriz cuadrada con un único elemento.

Además, dos matrices A y B son iguales, $A = B$, si y sólo si tienen el mismo tamaño y sus correspondientes componentes son iguales, es decir: $a_{ij} = b_{ij}$, para todo i, j. Si alguna de las condiciones no se cumple, entonces las matrices A y B no son iguales y se escribe $A \neq B$. Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, entonces $A = B$ si y sólo si $a_{11} = 2, a_{12} = -1, a_{21} = 3$ y $a_{22} = 0$; $B \neq C$ puesto que el elemento en la posición 2, 2 (fila 2, columna 2) de la matriz B, que es $b_{22} = 0$, es distinto de $c_{22} = 4$; $B \neq D$ y $C \neq D$ porque tienen diferentes dimensiones. Una vez revisado el concepto de matriz y su dimensión, se está en condiciones de definir el de matriz Jacobiana, como se muestra a continuación.

3.2.1 Definición de matriz Jacobiana de una función de la forma $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$

La *matriz Jacobiana* o *matriz de derivadas parciales* de una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de la forma $f(P) = \big(f_1(P), f_2(P), \dots, f_m(P)\big)$, donde $P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in Domf$, se denota por $Df(P)$ y es una matriz $m \times n$ (m filas y n columnas) cuya *ij-ésima* entrada (elemento en la fila i y columna j) está dada por la derivada parcial con respecto a la variable x_j de la función componente f_i, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)$, con $i = 1,2, \dots, m$ y $j = 1,2, \dots, n$; es decir:

$$Df(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P) \end{bmatrix}.$$

Es importante destacar que el número m de filas de la matriz Jacobiana Df coincide con el número de componentes, $f_1, f_2, \dots, f_m$, que definen a la función f; mientras que el número n de columnas de la matriz es igual al número de variables, $x_1, x_2, \dots, x_n$, de las que depende la función f.

Ejemplo

Calcula la matriz de derivadas parciales o matriz Jacobiana de las siguientes funciones:

(a) $f(x, y) = (e^{2x-y} + 3y,\ 5xy^2)$.

(b) $f(x, y) = (x^2 + \cos y,\ 2xye^{x-y},\ x \ln y)$.

(c) $f(x, y, z) = (ze^{2x},\ -y^3e^z)$.

(d) $f(x, y, z) = \big(x^3y^2e^{x^2+y^2},\ (x^2 + y^2)e^z,\ xyz\big)$.

(Adaptado a partir de Marsden y Tromba, 1991, p. 126).

Solución:

(a) En este caso, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y sus funciones componentes son $f_1(x, y) = e^{2x-y} + 3y$ y $f_2(x, y) = 5xy^2$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, por lo que la matriz Jacobiana de f es una matriz 2×2 cuyas entradas o elementos son las derivadas parciales de las funciones componentes f_1 y f_2.

Calculando primero las derivadas parciales de $f_1(x,y) = e^{2x-y} + 3y$, se tiene que:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dx}[e^{2x-y} + 3y]$$

$$= \frac{d}{dx}[e^{2x-y}] + \frac{d}{dx}[3y]$$

$$= e^{2x-y}\frac{d}{dx}[2x-y] + 0$$

$$= e^{2x-y}\left(\frac{d}{dx}[2x] - \frac{d}{dx}[y]\right)$$

$$= e^{2x-y}(2-0)$$

$$= 2e^{2x-y}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dy}[e^{2x-y} + 3y]$$

$$= \frac{d}{dy}[e^{2x-y}] + \frac{d}{dy}[3y]$$

$$= e^{2x-y}\frac{d}{dy}[2x-y] + 3\frac{d}{dy}[y]$$

$$= e^{2x-y}\left(\frac{d}{dy}[2x] - \frac{d}{dy}[y]\right) + 3(1)$$

$$= e^{2x-y}(0-1) + 3$$

$$= -e^{2x-y} + 3$$

Calculando ahora las derivadas parciales de $f_2(x,y) = 5xy^2$, se tiene que:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dx}[5xy^2]$$

$$= 5y^2\frac{d}{dx}[x]$$

$$= 5y^2(1)$$

$$= 5y^2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dy}[5xy^2]$$

$$= 5x\frac{d}{dy}[y^2]$$

$$= 5x(2y)$$

$$= 10xy$$

De este modo, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la matriz Jacobiana de f es:

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2x-y} & -e^{2x-y}+3 \\ 5y^2 & 10xy \end{bmatrix}.$$

Más aún, es posible evaluar a la matriz Jacobiana en un par ordenado específico de su dominio, por ejemplo, en el (0,0), de modo que:

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2(0)-0} & -e^{2(0)-0}+3 \\ 5(0)^2 & 10(0)(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) En este caso, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y sus funciones componentes son $f_1(x,y) = x^2 + cos\, y$, $f_2(x,y) = 2xye^{x-y}$ y $f_3(x,y) = x\, ln\, y$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $y > 0$, por lo que la matriz Jacobiana de f es una matriz 3×2 cuyas entradas son las derivadas parciales de las funciones componentes f_1, f_2 y f_3.

Calculando primero las derivadas parciales de $f_1(x,y) = x^2 + cos\, y$, se tiene que:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dx}[x^2 + cos\, y]$$

$$= \frac{d}{dx}[x^2] + \frac{d}{dx}[cosy]$$

$$= 2x + 0$$

$$= 2x$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dy}[x^2 + cos\, y]$$

$$= \frac{d}{dy}[x^2] + \frac{d}{dy}[cosy]$$

$$= 0 + (-seny)$$

$$= -seny$$

Calculando ahora las derivadas parciales de $f_2(x,y) = 2xye^{x-y}$, se tiene que:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dx}[2xye^{x-y}]$$

$$= 2xy\frac{d}{dx}[e^{x-y}] + e^{x-y}\frac{d}{dx}[2xy]$$

$$= 2xy\left(e^{x-y}\frac{d}{dx}[x-y]\right) + e^{x-y}\left(2y\frac{d}{dx}[x]\right)$$

$$= 2xye^{x-y}\left(\frac{d}{dx}[x] - \frac{d}{dx}[y]\right) + e^{x-y}2y(1)$$

$$= 2xye^{x-y}(1-0) + e^{x-y}2y$$

$$= 2xye^{x-y} + 2ye^{x-y}$$

$$= 2ye^{x-y}(x+1)$$

$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dy}[2xye^{x-y}]$

$= 2xy\frac{d}{dy}[e^{x-y}] + e^{x-y}\frac{d}{dy}[2xy]$

$= 2xy\left(e^{x-y}\frac{d}{dy}[x-y]\right) + e^{x-y}\left(2x\frac{d}{dy}[y]\right)$

$= 2xye^{x-y}\left(\frac{d}{dy}[x] - \frac{d}{dy}[y]\right) + e^{x-y}2x(1)$

$= 2xye^{x-y}(0-1) + e^{x-y}2x$

$= -2xye^{x-y} + 2xe^{x-y}$

$= 2xe^{x-y}(1-y)$

Calculando, finalmente, las derivadas parciales de $f_3(x,y) = x\,ln\,y$, se tiene que:

$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dx}[x\,ln\,y]$

$= lny\frac{d}{dx}[x]$

$= lny(1)$

$= lny$

$\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dy}[x\,ln\,y]$

$= x\frac{d}{dy}[lny]$

$= x\left(\frac{1}{y}\cdot\frac{d}{dy}[y]\right)$

$= x\left(\frac{1}{y}\cdot 1\right)$

$= x\left(\frac{1}{y}\right)$

$= \frac{x}{y}$

Luego, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $y > 0$, la matriz Jacobiana de f es:

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -seny \\ 2ye^{x-y}(x+1) & 2xe^{x-y}(1-y) \\ ln\,y & \frac{x}{y} \end{bmatrix}.$$

Además, es posible evaluar a la matriz Jacobiana en cualquier par ordenado de su dominio, por ejemplo, en el (0,1), como se muestra a continuación:

$$Df(0,1)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,1) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,1)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,1) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,1)\\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(0,1) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(0,1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2(0) & -sen(1)\\ 2(1)e^{0-1}(0+1) & 2(0)e^{0-1}(1-1)\\ ln\,1 & \frac{0}{1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -sen(1)\\ 2e^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

(c) En este caso, $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ y sus funciones componentes son: $f_1(x,y,z)=ze^{2x}$ y $f_2(x,y,z)=-y^3e^z$, para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, por lo que la matriz Jacobiana de f es una matriz 2×3 cuyos elementos son las derivadas parciales de las funciones componentes f_1 y f_2.

Calculando primero las derivadas parciales de $f_1(x,y,z)=ze^{2x}$, se tiene que:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z)=\frac{d}{dx}[ze^{2x}]$$

$$=z\frac{d}{dx}[e^{2x}]$$

$$=z\left(e^{2x}\frac{d}{dx}[2x]\right)$$

$$=ze^{2x}\left(2\frac{d}{dx}[x]\right)$$

$$=ze^{2x}\big(2(1)\big)$$

$$=2ze^{2x}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z)=\frac{d}{dy}[ze^{2x}]$$

$$=0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z)=\frac{d}{dz}[ze^{2x}]$$

$$=e^{2x}\frac{d}{dz}[z]$$

$$=e^{2x}(1)$$

$$=e^{2x}$$

Calculando ahora las derivadas parciales de $f_2(x,y,z)=-y^3e^z$, se tiene que:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z)=\frac{d}{dx}[-y^3e^z]$$

$$=0$$

$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) = \frac{d}{dy}[-y^3 e^z]$

$= -e^z \frac{d}{dy}[y^3]$

$= -e^z(3y^2)$

$= -3y^2 e^z$

$\frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) = \frac{d}{dz}[-y^3 e^z]$

$= -y^3 \frac{d}{dz}[e^z]$

$= -y^3 e^z$

De este modo, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, la matriz Jacobiana de f es:

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ze^{2x} & 0 & e^{2x} \\ 0 & -3y^2e^z & -y^3e^z \end{bmatrix}.$$

Más aún, es posible evaluar a la matriz Jacobiana en cualquier terna ordenada de su dominio, por ejemplo, en el $(1,-1,0)$, de modo que:

$$Df(1,-1,0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,-1,0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,-1,0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(1,-1,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,-1,0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,-1,0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(1,-1,0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(0)e^{2(1)} & 0 & e^{2(1)} \\ 0 & -3(-1)^2e^{(0)} & -(-1)^3e^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^2 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) En este caso, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y sus funciones componentes son $f_1(x,y,z) = x^3y^2e^{x^2+y^2}$, $f_2(x,y,z) = (x^2+y^2)e^z$ y $f_3(x,y,z) = xyz$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, por lo que la matriz Jacobiana de f es una matriz 3×3 cuyas entradas son las derivadas parciales de las funciones componentes f_1, f_2 y f_3.Calculando primero las derivadas parciales de $f_1(x,y,z) = x^3y^2e^{x^2+y^2}$, se tiene que:

$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = \frac{d}{dx}\left[x^3y^2e^{x^2+y^2}\right]$
$= x^3y^2 \frac{d}{dx}\left[e^{x^2+y^2}\right] + e^{x^2+y^2}\frac{d}{dx}[x^3y^2]$
$= x^3y^2\left(e^{x^2+y^2}\frac{d}{dx}[x^2+y^2]\right) + e^{x^2+y^2}\left(y^2\frac{d}{dx}[x^3]\right)$
$= x^3y^2e^{x^2+y^2}\left(\frac{d}{dx}[x^2] + \frac{d}{dx}[y^2]\right) + e^{x^2+y^2}y^2(3x^2)$
$= x^3y^2e^{x^2+y^2}(2x+0) + 3x^2y^2e^{x^2+y^2}$
$= 2x^4y^2e^{x^2+y^2} + 3x^2y^2e^{x^2+y^2}$
$= x^2y^2e^{x^2+y^2}(2x^2+3)$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) = \frac{d}{dy}\left[x^3y^2e^{x^2+y^2}\right]$$
$$= x^3y^2\frac{d}{dy}\left[e^{x^2+y^2}\right] + e^{x^2+y^2}\frac{d}{dy}[x^3y^2]$$
$$= x^3y^2\left(e^{x^2+y^2}\frac{d}{dy}[x^2+y^2]\right) + e^{x^2+y^2}\left(x^3\frac{d}{dy}[y^2]\right)$$
$$= x^3y^2e^{x^2+y^2}\left(\frac{d}{dy}[x^2] + \frac{d}{dy}[y^2]\right) + e^{x^2+y^2}x^3(2y)$$
$$= x^3y^2e^{x^2+y^2}(0+2y) + 2x^3ye^{x^2+y^2}$$
$$= 2x^3y^3e^{x^2+y^2} + 2x^3ye^{x^2+y^2}$$
$$= 2x^3ye^{x^2+y^2}(y^2+1)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) = \frac{d}{dz}\left[x^3y^2e^{x^2+y^2}\right]$$
$$= 0$$

Calculando ahora las derivadas parciales de $f_2(x,y,z) = (x^2+y^2)e^z$, se tiene que:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) = \frac{d}{dx}[(x^2+y^2)e^z]$$
$$= e^z\frac{d}{dx}[x^2+y^2]$$
$$= e^z\left(\frac{d}{dx}[x^2] + \frac{d}{dx}[y^2]\right)$$
$$= e^z(2x+0)$$
$$= 2xe^z$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) = \frac{d}{dy}[(x^2+y^2)e^z]$$
$$= e^z\frac{d}{dy}[x^2+y^2]$$
$$= e^z\left(\frac{d}{dy}[x^2] + \frac{d}{dy}[y^2]\right)$$
$$= e^z(0+2y)$$
$$= 2ye^z$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) = \frac{d}{dz}[(x^2+y^2)e^z]$$
$$= (x^2+y^2)\frac{d}{dz}[e^z]$$
$$= (x^2+y^2)e^z$$

Calculando, finalmente, las derivadas parciales de $f_3(x,y,z) = xyz$, se tiene que:

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) = \frac{d}{dx}[xyz]$$
$$= yz\frac{d}{dx}[x]$$
$$= yz(1)$$
$$= yz$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) = \frac{d}{dy}[xyz]$$
$$= xz\frac{d}{dy}[y]$$
$$= xz(1)$$
$$= xz$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) = \frac{d}{dz}[xyz]$$
$$= xy\frac{d}{dz}[z]$$
$$= xy(1)$$
$$= xy$$

Luego, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, la matriz Jacobiana de f es:

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x^2y^2e^{x^2+y^2}(2x^2+3) & 2x^3ye^{x^2+y^2}(y^2+1) & 0 \\ 2xe^z & 2ye^z & (x^2+y^2)e^z \\ yz & xz & xy \end{bmatrix}.$$

Además, es posible evaluar a la matriz Jacobiana en cualquier terna ordenada de su dominio, por ejemplo, en el $(1,1,1)$, como se muestra a continuación:

$$Df(1,1,1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,1,1) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,1,1) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(1,1,1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,1,1) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,1,1) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(1,1,1) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(1,1,1) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(1,1,1) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(1,1,1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1)^2(1)^2e^{(1)^2+(1)^2}[2(1)^2+3] & 2(1)^3(1)e^{(1)^2+(1)^2}[(1)^2+1] & 0 \\ 2(1)e^{(1)} & 2(1)e^{(1)} & [(1)^2+(1)^2]e^{(1)} \\ (1)(1) & (1)(1) & (1)(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5e^2 & 4e^2 & 0 \\ 2e & 2e & 2e \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A continuación, se enuncia el criterio que permite determinar cuándo una función de varias variables, de valores reales o vectoriales, es diferenciable.

3.2.2 Criterio de diferenciabilidad

Sean $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $A \in Domf$. Si existen todas las derivadas parciales de f en A y son continuas en A, entonces f es diferenciable en A y su derivada es la matriz Jacobiana $Df(A)$.

Ejemplos

1. Retomando las funciones analizadas en el ejemplo de la sección 3.2.1, de acuerdo con el Criterio de Diferenciabilidad se tiene lo siguiente:

(a) $f(x,y) = (e^{2x-y} + 3y,\ 5xy^2)$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ y su derivada es

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2x-y} & -e^{2x-y}+3 \\ 5y^2 & 10xy \end{bmatrix},$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $f(x,y) = (x^2 + \cos y\,,\ 2xye^{x-y},\ x \ln y)$ es diferenciable en $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ y su derivada es

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -seny \\ 2ye^{x-y}(x+1) & 2xe^{x-y}(1-y) \\ \ln y & \frac{x}{y} \end{bmatrix},$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $y > 0$.

(c) $f(x,y,z) = (ze^{2x},\ -y^3e^z)$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}^3$ y su derivada está dada por

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ze^{2x} & 0 & e^{2x} \\ 0 & -3y^2e^z & -y^3e^z \end{bmatrix},$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(d) $f(x,y,z) = \left(x^3y^2e^{x^2+y^2},\ (x^2+y^2)e^z,\ xyz\right)$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}^3$ y su derivada está dada por

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x^2y^2e^{x^2+y^2}(2x^2+3) & 2x^3ye^{x^2+y^2}(y^2+1) & 0 \\ 2xe^z & 2ye^z & (x^2+y^2)e^z \\ yz & xz & xy \end{bmatrix},$$

para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Nótese que, en cada uno de los casos anteriores, la función indicada es diferenciable en su dominio, debido a que todas las derivadas parciales de cada función son continuas en su respectivo dominio (en el dominio de la función original).

2. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = x^2e^y - y^3 \ln x$. Demuestra que f es diferenciable en su dominio. (Adaptado a partir de Leithold, 1998, p. 958).

Solución:

En este caso, el dominio de la función está dado por $Domf = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}$.

Si $(x,y) \in Domf$ cualquiera, entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^y - \frac{y^3}{x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2e^y - 3y^2 \ln x$.

Como $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen y son continuas en cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $x > 0$ entonces, por el Criterio de Diferenciabilidad, f es diferenciable en su dominio. Además, su derivada es la matriz Jacobiana: $Df(x,y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right] = \left[2xe^y - \frac{y^3}{x} \quad x^2e^y - 3y^2 \ln x\right]$, para todo $(x,y) \in Domf$.

3. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = \frac{senx + e^{-xy}}{x^4 + y^4}$. Demuestra que f es diferenciable en cada $(x,y) \neq (0,0)$. (Adaptado a partir de Marsden y Tromba, 1991, p. 129).

Solución:

En este caso, $Domf = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) \neq (0,0)\}$. Si $(x,y) \in Domf$ cualquiera, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(x^4+y^4)(cosx - ye^{-xy}) - (senx + e^{-xy})(4x^3)}{(x^4+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^4+y^4)(-xe^{-xy}) - (senx + e^{-xy})(4y^3)}{(x^4+y^4)^2}$$

Como $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen y son continuas en cada $(x,y) \neq (0,0)$ entonces, por el Criterio de Diferenciabilidad, f es diferenciable en cada $(x,y) \neq (0,0)$; esto es, f es diferenciable en su dominio. Además, su derivada es la matriz Jacobiana:

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(x^4+y^4)(cosx - ye^{-xy}) - (senx + e^{-xy})(4x^3)}{(x^4+y^4)^2} & \frac{(x^4+y^4)(-xe^{-xy}) - (senx + e^{-xy})(4y^3)}{(x^4+y^4)^2} \end{bmatrix}$$

para todo $(x,y) \in Domf$.

4. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Demuestra que f es diferenciable en $(0,0)$. (Adaptado a partir de Leithold, 1998, p. 962).

Solución:

En este caso, $Domf = \mathbb{R}^2$. Por un lado, para $(x,y) \neq (0,0)$, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(x^2+y^2)(2xy^2) - (x^2y^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y^2 + 2xy^4 - 2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^2+y^2)(2x^2y) - (x^2y^2)(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^4y + 2x^2y^3 - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}$$

Es decir: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}$, para todo $(x,y) \neq (0,0)$.

Por otro lado, para $(x,y) = (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2(0)^2}{x^2+0^2} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{0}{x^2} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{(0)^2y^2}{0^2+y^2} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{0}{y^2} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Es decir: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

De este modo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Como se ha visto, $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen en $(0,0)$ y son iguales a 0.

Por el Criterio de Diferenciabilidad, para demostrar que f es diferenciable en $(0,0)$, sólo falta verificar que $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en $(0,0)$. En efecto, $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $(0,0)$, puesto que:

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe y vale 0.

(ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = 0$, mediante límites direccionales, aproximando (x,y) a $(0,0)$ tanto por los ejes coordenados como por la recta identidad, o bien, usando coordenadas polares; es decir: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existe y vale 0.

(iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Análogamente se comprueba que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $(0,0)$.

Observación

Si todas las derivadas parciales de una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existen en $A \in Domf$ pero no son continuas en A, entonces no es posible aplicar el Criterio de Diferenciabilidad para determinar la diferenciabilidad de f en A.

3.2.3 Diferenciabilidad y continuidad

Sean $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $A \in Domf$. Si f es diferenciable en A, entonces f es continua en A.

Contrapositiva

Si f es discontinua en A, entonces f no es diferenciable en A.

Es importante destacar que f debe ser diferenciable en A para que f sea continua en A; es decir, que no basta con que las derivadas parciales de la función existan en A para que ésta sea continua en A.

Por ejemplo, la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^3+y^3} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ es tal que $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen en $(0,0)$ pero f es discontinua en $(0,0)$ y, en consecuencia, f no es diferenciable en $(0,0)$. En efecto:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x(0)^2}{x^3+0^3}-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{0}{x^3}-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{(0)y^2}{0^3+y^3}-0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{0}{y^3}-0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Es decir: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Además, en el ejemplo 2 de la sección 2.1.6 se ha visto ya que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^3+y^3}$ no existe, puesto que $f(x,y)$ se aproxima a 0 cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ por los ejes coordenados, pero se aproxima a $\frac{1}{2}$ cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ por la recta identidad. De aquí que, f es discontinua en $(0,0)$. Luego, por la Contrapositiva de "Diferenciabilidad implica Continuidad": f no es diferenciable en $(0,0)$.

Nótese que, para demostrar la no diferenciabilidad de una función en un punto, sólo bastará mostrar la discontinuidad de dicha función en ese punto.

Conclusión General

La sola existencia de las derivadas parciales de una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en un punto $A \in Domf$ no implica la diferenciabilidad ni la continuidad de f en A.

Además, en general, los recíprocos de los resultados "Criterio de Diferenciabilidad" y "Diferenciabilidad implica Continuidad" no se cumplen; es decir: (a) La diferenciabilidad de f en A no implica la continuidad de sus derivadas parciales en A. (b) La continuidad de f en A no implica la diferenciabilidad de f en A.

En la siguiente sección se establecerán las condiciones de diferenciabilidad de las operaciones básicas entre funciones de varias variables, así como las reglas para determinar sus respectivas derivadas.

3.3 Reglas de Diferenciación

Para estudiar las reglas que permiten derivar las operaciones entre funciones de varias variables será conveniente establecer, en primer lugar, las operaciones básicas de matrices.

Si A y B son matrices $m \times n$, entonces la *suma* $A + B$ es la matriz $m \times n$ que se obtiene al sumar las correspondientes componentes de A y B; enfatizando en que la suma de matrices de diferentes tamaños no está definida. Por ejemplo:

(a) Si $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, entonces A y B son matrices 2×2 y su suma $A + B$ sí está definida y es la matriz 2×2 dada por:

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+1 & 2+3 \\ 0+(-1) & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, entonces A y B son matrices 2×3 y su suma $A + B$ sí está definida y es la matriz 2×3 dada por:

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & 1+0 & -2+0 \\ 1+0 & 2+0 & 3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(c) Si $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, entonces A y B son matrices 3×1 y su suma $A + B$ sí está definida y es la matriz 3×1 dada por:

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+1 \\ 3+(-3) \\ -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, entonces A es una matriz 3×2, B es una matriz 2×3 y la suma $A + B$ no está definida porque las matrices tienen diferentes dimensiones.

Si A es una matriz $m \times n$ y c es un escalar (número real), entonces el *múltiplo escalar* cA es la matriz $m \times n$ que se obtiene al multiplicar por c cada componente de A. Por ejemplo:

(a) Si $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, entonces $2A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ y $-A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Si $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -9 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, entonces:

$\frac{1}{3}A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $-B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -5 \\ -7 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ y

$$\frac{1}{3}A - B = \frac{1}{3}A + (-B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -5 \\ -7 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & -6 \\ -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De este modo, la *resta* de matrices se define a partir de las operaciones básicas de suma y múltiplo escalar; esto es: $A - B = A + (-B)$, siempre que las matrices A y B posean la misma dimensión.

Si A es una matriz $m \times n$ y B es una matriz $n \times p$, entonces la *multiplicación* AB es la matriz $m \times p$ cuya ij-*ésima* componente, c_{ij}, se obtiene al multiplicar las componentes de la i-*ésima* fila de A por las correspondientes componentes de la j-*ésima* columna de B y luego sumar los resultados; es decir: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$, con $i = 1,2,\ldots,m$ y $j = 1,2,\ldots,p$. Además, para que la multiplicación de dos matrices esté definida, el número de columnas de la primera matriz debe coincidir con el número de filas de la segunda. A continuación, se muestran algunos ejemplos.

(a) Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, entonces A y B son matrices 2×2 y la multiplicación AB sí está definida y es también una matriz 2×2 dada por:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, la multiplicación BA es una matriz 2×2 definida por:

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{bmatrix}.$$

En particular, para $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, la multiplicación AB está dada por:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(3) + (-1)(5) & (1)(2) + (-1)(6) \\ (-2)(3) + (4)(5) & (-2)(2) + (4)(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 14 & 20 \end{bmatrix}$$

En efecto, si $C = AB$ y c_{ij} es su ij-*ésima* componente, se tiene que:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = (1)(3) + (-1)(5) = -2$$
$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = (1)(2) + (-1)(6) = -4$$
$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = (-2)(3) + (4)(5) = 14$$
$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = (-2)(2) + (4)(6) = 20$$

Mientras que, la multiplicación BA está definida por:

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3)(1) + (2)(-2) & (3)(-1) + (2)(4) \\ (5)(1) + (6)(-2) & (5)(-1) + (6)(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -7 & 19 \end{bmatrix}$$

En efecto, si $D = BA$ y d_{ij} es su *ij-ésima* componente, se tiene que:

$$d_{11} = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} = (3)(1) + (2)(-2) = -1$$
$$d_{12} = b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} = (3)(-1) + (2)(4) = 5$$
$$d_{21} = b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} = (5)(1) + (6)(-2) = -7$$
$$d_{22} = b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} = (5)(-1) + (6)(4) = 19$$

Más aún, es importante resaltar que $AB \neq BA$.

(b) Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, entonces A es una matriz 2×3, B es una matriz 3×4 y la multiplicación AB sí está definida y es la matriz 2×4:

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}.$$

En efecto, si $C = AB$ y c_{ij} es su *ij-ésima* componente, se tiene que:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = (1)(4) + (2)(0) + (4)(2) = 12$$
$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = (1)(1) + (2)(-1) + (4)(7) = 27$$
$$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} = (1)(4) + (2)(3) + (4)(5) = 30$$
$$c_{14} = a_{11}b_{14} + a_{12}b_{24} + a_{13}b_{34} = (1)(3) + (2)(1) + (4)(2) = 13$$
$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = (2)(4) + (6)(0) + (0)(2) = 8$$
$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = (2)(1) + (6)(-1) + (0)(7) = -4$$
$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} = (2)(4) + (6)(3) + (0)(5) = 26$$
$$c_{24} = a_{21}b_{14} + a_{22}b_{24} + a_{23}b_{34} = (2)(3) + (6)(1) + (0)(2) = 12$$

Por otro lado, la multiplicación BA no está definida, puesto que el número de columnas de la matriz B (matriz 3×4), que es 4, no coincide con el número de filas de la matriz A (matriz 2×3), que es 2.

(c) Si $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$, entonces A es una matriz 3×1, B es una matriz 1×3 y las multiplicaciones AB y BA sí están definidas y son las matrices 3×3 y 1×1 que se muestran a continuación:

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -6 \\ -8 & -10 & 12 \\ 12 & 15 & -18 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad BA = [-24]$$

Donde:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(4) & (1)(5) & (1)(-6) \\ (-2)(4) & (-2)(5) & (-2)(-6) \\ (3)(4) & (3)(5) & (3)(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -6 \\ -8 & -10 & 12 \\ 12 & 15 & -18 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = [(4)(1) + (5)(-2) + (-6)(3)] = [-24]$$

Por lo que, nuevamente, $AB \neq BA$.

Nótese que, en general, la multiplicación de matrices no es conmutativa; es decir, que no se obtiene el mismo resultado al efectuar el producto de las matrices A y B, en el orden AB que en el orden BA; incluso, puede suceder que alguno de estos productos ni siquiera esté definido.

Una vez establecidas las operaciones básicas de las matrices, se cuenta con las "herramientas" necesarias para entender las reglas para derivar las operaciones entre funciones de varias variables.

3.3.1 Reglas de Diferenciación para Sumas, Restas, Productos y Cocientes

Sean $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dos funciones tales que $Domf = Domg$ y $c \in \mathbb{R}$. Si f y g son diferenciables en un punto $A \in \mathbb{R}^n$, entonces:

(i) cf es diferenciable en A y su derivada está definida por: $D(cf)(A) = cDf(A)$

(ii) $f + g$ es diferenciable en A y su derivada está definida por: $D(f+g)(A) = Df(A) + Dg(A)$

(iii) $f - g$ es diferenciable en A y su derivada está definida por: $D(f-g)(A) = Df(A) - Dg(A)$

(iv) Para $m = 1$, fg es diferenciable en A y su derivada está definida por: $D(fg)(A) = f(A)Dg(A) + g(A)Df(A)$

(v) Para $m = 1$ y $g(A) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ es diferenciable en A y su derivada está definida por: $D\left(\frac{f}{g}\right)(A) = \frac{g(A)Df(A) - f(A)Dg(A)}{[g(A)]^2}$

Donde las derivadas indicadas involucran operaciones entre matrices. De este modo, en (i), la notación $cDf(A)$ representa el producto de la constante c por la matriz $Df(A)$, que se lleva a cabo multiplicando por c cada elemento de la matriz $Df(A)$. De manera semejante, en (iv) y (v), la operación $f(A)Dg(A)$ se efectúa multiplicando por $f(A)$ cada entrada de la matriz $Dg(A)$ y la operación $g(A)Df(A)$ se realiza multiplicando por $g(A)$ cada elemento de la matriz $Df(A)$. Por otro lado, en (ii), la expresión $Df(A) + Dg(A)$ representa a la suma de las matrices $Df(A)$ y $Dg(A)$, donde se suman sus respectivos elementos situados en la misma posición de fila y columna; análogamente, en (iii), la expresión $Df(A) - Dg(A)$ representa a la resta de las matrices $Df(A)$ y $Dg(A)$, donde ahora se restan sus respectivos elementos situados en la misma posición de fila y columna. Nótese que, en (iv) y (v), f y g son funciones que toman valores reales, por lo que en ningún momento se están realizando multiplicaciones entre vectores y matrices. Más aún, en (v), la expresión $g(A)Df(A) - f(A)Dg(A)$ representa una resta de matrices y $\frac{g(A)Df(A)-f(A)Dg(A)}{[g(A)]^2}$ representa un múltiplo escalar que puede reescribirse como $\frac{1}{[g(A)]^2}[g(A)Df(A) - f(A)Dg(A)]$.

Ejemplos

1. Sean $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = x^3 - 5y^2$ y $c = 4$. Encuentra la derivada de la función cf en el punto $(-1,1)$.

Solución:

Como $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -10y$ existen y son continuas en cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ entonces, por el Criterio de Diferenciabilidad, f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Además, su derivada es la matriz Jacobiana: $Df(x,y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right] = [3x^2 \quad -10y]$, para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Luego, por (i) de las Reglas de Diferenciación, cf es diferenciable en (x,y) y su derivada está dada por $D(cf)(x,y) = cDf(x,y)$, para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; es decir:

$D(cf)(x,y) = cDf(x,y) = 4[3x^2 \quad -10y] = [12x^2 \quad -40y]$, para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Por lo tanto, la derivada de la función cf en el punto $(-1,1)$ es:

$D(cf)(-1,1) = [12(-1)^2 \quad -40(1)] = [12 \quad -40]$.

2. Sean $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ las funciones definidas por $f(x,y) = (x^2 \cos y,\ ysen3x)$ y $g(x,y) = (x+y,\ 2xy)$. Calcula $D(f+g)(1,0)$.

Solución:

En este caso, f y g son diferenciables en $\mathbb{R}^2$, por el Criterio de Diferenciabilidad, debido a que todas las derivadas parciales de sus funciones componentes, $f_1(x,y) = x^2 \cos y$, $f_2(x,y) = ysen3x$, $g_1(x,y) = x + y$ y $g_2(x,y) = 2xy$, existen y son continuas en cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Además, para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ las derivadas de f y g son las matrices:

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \cos y & -x^2 seny \\ 3y \cos 3x & sen3x \end{bmatrix}$$

$$Dg(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$$

De aquí que:

$$Df(1,0) = \begin{bmatrix} 2(1) \cos(0) & -(1)^2 sen(0) \\ 3(0) \cos 3(1) & sen3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & sen(3) \end{bmatrix} \text{ y } Dg(1,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Luego, por (ii) de las Reglas de Diferenciación, $f+g$ es diferenciable y su derivada está dada por $D(f+g)(x,y) = Df(x,y) + Dg(x,y)$, para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. De este modo:

$$D(f+g)(1,0) = Df(1,0) + Dg(1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & sen(3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 + sen(3) \end{bmatrix}.$$

3. Sean $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x,y) = x^3 + y^4$ y $g(x,y) = x^2 + 3$. Calcula $D\left(\frac{f}{g}\right)(x,y)$.

Solución:

Como $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x$ y $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$ existen y son continuas en cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, entonces f y g son diferenciables en cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (por el Criterio de Diferenciabilidad). Además, sus derivadas son las matrices:

$$Df(x,y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right] = [3x^2 \quad 4y^3]$$

$$Dg(x,y) = \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right] = [2x \quad 0]$$

para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Luego, por (v) de las Reglas de Diferenciación:

$D\left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \frac{g(x,y)Df(x,y) - f(x,y)Dg(x,y)}{[g(x,y)]^2}$, para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Es decir:

$D\left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \frac{(x^2+3)[3x^2 \quad 4y^3]-(x^3+y^4)[2x \quad 0]}{(x^2+3)^2}$
sustituyendo las funciones y derivadas (matrices) indicadas

$= \frac{[3x^2(x^2+3) \quad 4y^3(x^2+3)]-[2x(x^3+y^4) \quad 0]}{(x^2+3)^2}$
aplicando la operación múltiplo escalar de las matrices en el numerador

$= \frac{[3x^2(x^2+3)-2x(x^3+y^4) \quad 4y^3(x^2+3)-0]}{(x^2+3)^2}$
restando las matrices en el numerador

$= \frac{[3x^4+9x^2-2x^4-2xy^4 \quad 4x^2y^3+12y^3]}{(x^2+3)^2}$
efectuando las multiplicaciones indicadas dentro de la matriz en el numerador

$= \frac{[x^4+9x^2-2xy^4 \quad 4x^2y^3+12y^3]}{(x^2+3)^2}$
reduciendo los términos semejantes dentro de la matriz en el numerador

$= \frac{[x(x^3+9x-2y^4) \quad 4y^3(x^2+3)]}{(x^2+3)^2}$
factorizando cada elemento de la matriz en el numerador

$= \frac{1}{(x^2+3)^2}[x(x^3+9x-2y^4) \quad 4y^3(x^2+3)]$
reescribiendo la expresión del paso previo como un múltiplo escalar

$= \left[\frac{x(x^3+9x-2y^4)}{(x^2+3)^2} \quad \frac{4y^3(x^2+3)}{(x^2+3)^2}\right]$
aplicando la operación múltiplo escalar

Por lo tanto: $D\left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \left[\frac{x(x^3+9x-2y^4)}{(x^2+3)^2} \quad \frac{4y^3(x^2+3)}{(x^2+3)^2}\right]$, para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

A continuación, se estudiará la regla que permite establecer la diferenciabilidad de una composición de funciones y su respectiva derivada.

3.3.2 Regla de la cadena

Sean $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ dos funciones. Si g es diferenciable en $A \in Domg$ y f es diferenciable en $g(A) \in Domf$, entonces $f \circ g$ es diferenciable en A y su derivada está definida por

$D(f \circ g)(A) = Df\big(g(A)\big)Dg(A)$.

Donde la notación $Df\big(g(A)\big)Dg(A)$ representa el producto de las matrices $Df\big(g(A)\big)$ y $Dg(A)$, en ese orden estricto. Más aún, $Df\big(g(A)\big)$ es una matriz $k \times m$ y $Dg(A)$ es una matriz $m \times n$ y, en consecuencia, su producto $Df\big(g(A)\big)Dg(A)$ está definido y será una matriz $k \times n$. También es importante destacar que la derivada de f, que es la matriz Df, se evalúa en $g(A)$ y no en A.

En el caso particular en que f y g son funciones reales de una variable, $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la regla de la cadena se reduce a la fórmula estudiada en Cálculo de una Variable: $(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$, o bien, en su forma diferencial $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$, siempre que $z = f(y)$ y $y = g(x)$, de modo que $z = f\big(g(x)\big) = (f \circ g)(x)$. O, equivalentemente: $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$.

Ejemplos

1. Sean $f(x,y) = 3xy + y^2$ y $g(t) = (e^t, sen\, t)$. Calcula $D(f \circ g)(t)$ usando la regla de la cadena. (Adaptado a partir de Leithold, 1998, p. 967).

Solución:

En este caso, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ y $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donde, por el Criterio de Diferenciabilidad, f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y g es diferenciable en $\mathbb{R}$.

Además, sus derivadas son las matrices:

$Dg(t) = \begin{bmatrix} \frac{dg_1}{dt}(t) \\ \frac{dg_2}{dt}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ cost \end{bmatrix}$, para cada $t \in \mathbb{R}$, y

$Df(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = [3y \quad 3x + 2y]$, para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

De aquí que: $Df\big(g(t)\big) = Df(e^t, sen\, t) = [3\, sen\, t \quad 3e^t + 2\, sen\, t]$, para cada $t \in \mathbb{R}$, que se obtiene de reemplazar x por e^t y y por $sent$ en la matriz $Df(x,y) = [3y \quad 3x + 2y]$. Luego, por la Regla de la Cadena, $f \circ g$ es diferenciable en cada $t \in \mathbb{R}$ y su derivada está dada por:

$$D(f \circ g)(t) = Df\big(g(t)\big)Dg(t)$$

$$= [3\, sen\, t \quad 3e^t + 2\, sen\, t] \begin{bmatrix} e^t \\ cost \end{bmatrix}$$

$$= [(3sent)(e^t) + (3e^t + 2sent)(cost)]$$

$$= [3e^t sent + (3e^t + 2sent)(cost)]$$

O bien: $(f \circ g)'(t) = 3e^t sent + (3e^t + 2sent)(cost)$, para cada $t \in \mathbb{R}$; puesto que, en este caso, $f \circ g$ es una función real que depende de una sola variable, t.

Observación

En general, por la Regla de la Cadena, se tiene lo siguiente.

$$D(f \circ g)(t) = Df(x,y)Dg(t)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dg_1}{dt}(t) \\ \frac{dg_1}{dt}(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix}$$

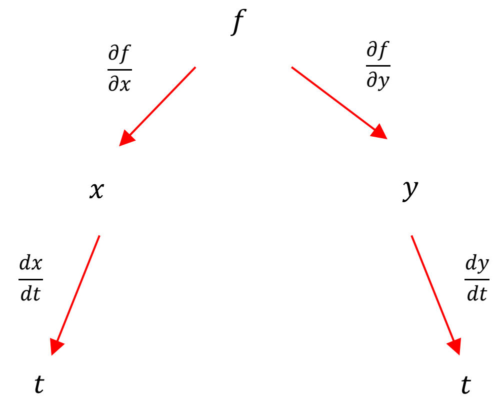
$$= \left[\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \right]$$

Donde se está considerando que $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$ que depende de las variables x y y, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una función diferenciable en $\mathbb{R}$ que depende de la variable t y que $x(t) = g_1(t)$ y $y(t) = g_2(t)$ son las funciones componentes de g. De este modo, por la regla de la cadena, la derivada de la función f con respecto a la variable t está dada por:

$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$

que es precisamente la única entrada o elemento de la matriz Jacobiana calculada anteriormente. Esta fórmula también puede ser deducida sin tener que realizar la multiplicación de matrices, mediante el diagrama de árbol de la figura 3.5.

Figura 3.5 Diagrama de árbol del ejemplo 1 sobre regla de la cadena



Fuente: Elaboración Propia

Donde, en la parte más alta del diagrama se coloca la función externa f de la composición de funciones y se dibujan tantas "ramas" como variables de las cuales dependa ésta; en este caso, como f depende de las variables x y y, se dibuja una "rama" o flecha dirigida desde f hasta x y otra desde f hasta y y, a su vez, se dibuja una flecha desde x hasta la variable t y desde y hasta t, en virtud de que las variables x y y dependen de t. Además, sobre cada flecha se escribe la notación de la derivada (parcial u ordinaria) que relaciona a las diferentes funciones o variables. Luego, para poder obtener la fórmula de la regla de la cadena, las derivadas que se encuentran sobre la misma trayectoria que conecta a f con t (pasando por la variable x o y) se combinan mediante la operación producto y, a su vez, dichas multiplicaciones se combinan mediante la operación suma.

Para este ejemplo en particular, se tiene que:

$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$

$= (3y)(e^t) + (3x + 2y)(cost)$
calculando las derivadas indicadas

$= (3sent)e^t + (3e^t + 2\,sen\,t)(cost)$
sustituyendo $x = e^t$ *y* $y = sent$

$= 3e^t sent + (3e^t + 2\,sen\,t)(cost)$

Donde $f(x, y) = 3xy + y^2$, $x(t) = g_1(t) = e^t$ y $y(t) = g_2(t) = sent$. Nótese que, en el proceso anterior, es indispensable llevar a cabo la sustitución de x por e^t y de y por $sent$ para que la derivada $\frac{df}{dt}$ dependa exclusivamente de la variable t.

2. Sean $f(u, v) = u^3 + v^5$ y $g(x, y) = (x^2e^y,\ xe^{-3y})$. Calcula $D(f \circ g)(x, y)$ usando la regla de la cadena.

Solución:

En este caso, $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Las funciones f y g son diferenciables en todo $\mathbb{R}^2$ (por el Criterio de Diferenciabilidad). Además, sus derivadas son las matrices:

$Dg(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xe^y & x^2e^y \\ e^{-3y} & -3xe^{-3y} \end{bmatrix}$, para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, y

$Df(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix} = [3u^2 \quad 5v^4]$, para cada $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

De aquí que: $Df\big(g(x,y)\big) = Df(x^2e^y, xe^{-3y}) = [3(x^2e^y)^2 \quad 5(xe^{-3y})^4] = [3x^4e^{2y} \quad 5x^4e^{-12y}]$ para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, que se obtiene de reemplazar u por x^2e^y y v por xe^{-3y} en la matriz $Df(u,v) = [3u^2 \quad 5v^4]$. Luego, por la Regla de la Cadena, $f \circ g$ es diferenciable en cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y su derivada está dada por:

$D(f \circ g)(x,y) = Df\big(g(x,y)\big)Dg(x,y)$

$= [3x^4e^{2y} \quad 5x^4e^{-12y}] \begin{bmatrix} 2xe^y & x^2e^y \\ e^{-3y} & -3xe^{-3y} \end{bmatrix}$

$= [(3x^4e^{2y})(2xe^y) + (5x^4e^{-12y})(e^{-3y}) \quad (3x^4e^{2y})(x^2e^y) + (5x^4e^{-12y})(-3xe^{-3y})]$

$= [6x^5e^{3y} + 5x^4e^{-15y} \quad 3x^6e^{3y} - 15x^5e^{-15y}]$

Observación

En general, por la Regla de la Cadena, se tiene lo siguiente.

$D(f \circ g)(x,y) = Df(u,v)Dg(x,y)$

$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$

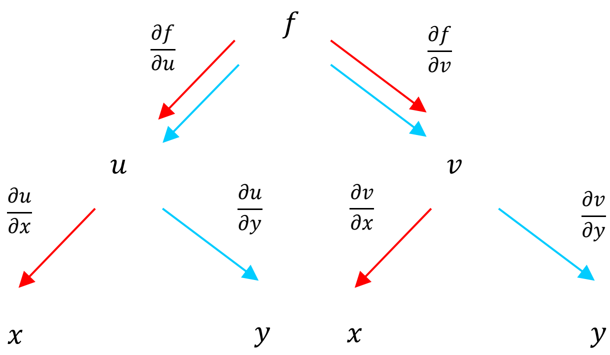
Donde se considera que $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$ que depende de las variables u y v y $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$ que depende de las variables x y y; además, $u(x,y) = g_1(x,y)$ y $v(x,y) = g_2(x,y)$ son las funciones componentes de g. Así, las derivadas parciales de la función f con respecto a las variables x y y están dadas por:

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$

que son precisamente las entradas o elementos de la matriz Jacobiana calculada anteriormente y, cuyas fórmulas, también pueden ser obtenidas a partir del diagrama de árbol de la figura 3.6

Figura 3.6 Diagrama de árbol del ejemplo 2 sobre regla de la cadena



Fuente: Elaboración Propia

Donde, en la cima del diagrama se coloca la función externa f de la composición de funciones y se dibujan tantas "ramas" como variables de las cuales dependa ésta; en este caso, como f depende de las variables u y v, se dibuja una "rama" o flecha dirigida desde f hasta u y otra desde f hasta v y, a su vez, se dibuja una flecha desde u hasta la variable x y desde u hasta y; análogamente, se dibuja una flecha desde v hasta la variable x y desde v hasta y, en virtud de que las variables u y v dependen de las variables x y y. Además, sobre cada flecha se escribe la notación de la derivada parcial que relaciona a las diferentes funciones o variables. Luego, para obtener las fórmulas, las derivadas parciales que se encuentran sobre la misma trayectoria que conduce desde f hasta x (pasando por la variable u o por v) se combinan mediante la operación producto y, a su vez, dichas multiplicaciones se combinan mediante la operación suma. De manera semejante se opera con las derivadas parciales ubicadas sobre las dos diferentes trayectorias que conducen desde f hasta y.

Para este ejemplo en particular, se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=(3u^2)(2xe^y)+(5v^4)(e^{-3y})$$
calculando las derivadas indicadas

$$=(3(x^2e^y)^2)(2xe^y)+(5(xe^{-3y})^4)(e^{-3y})$$
sustituyendo $u=x^2e^y$ *y* $v=xe^{-3y}$

$$=(3x^4e^{2y})(2xe^y)+(5x^4e^{-12y})(e^{-3y})$$
efectuando las potencias indicadas

$$=6x^5e^{3y}+5x^4e^{-15y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=(3u^2)(x^2e^y)+(5v^4)(-3xe^{-3y})$$
calculando las derivadas indicadas

$$=(3(x^2e^y)^2)(x^2e^y)+(5(xe^{-3y})^4)(-3xe^{-3y})$$
sustituyendo $u=x^2e^y$ *y* $v=xe^{-3y}$

$$=(3x^4e^{2y})(x^2e^y)+(5x^4e^{-12y})(-3xe^{-3y})$$
efectuando las potencias indicadas

$$=3x^6e^{3y}-15x^5e^{-15y}$$

Donde $f(u,v)=u^3+v^5$, $u(x,y)=g_1(x,y)=x^2e^y$ y $v(x,y)=g_2(x,y)=xe^{-3y}$.

Nótese que, en el proceso anterior, es indispensable llevar a cabo la sustitución de u por x^2e^y y v por xe^{-3y} para que las derivadas parciales, $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$, dependan exclusivamente de las variables x y y.

3. Si $g(x,y) = (x^2+1,\ y^3)$ y $f(u,v) = (u+v,\ u^3,\ v^2)$, calcula la derivada de $f \circ g$ en $(1,1)$ usando la regla de la cadena. (Adaptado a partir de Marsden y Tromba, 1991, p. 140).

Solución:

En este caso, $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Las funciones f y g son diferenciables en todo $\mathbb{R}^2$ (por el Criterio de Diferenciabilidad). Además, sus derivadas son las matrices:

$$Dg(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{bmatrix}, \text{ para cada } (x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ y}$$

$$Df(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial f_3}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3u^2 & 0 \\ 0 & 2v \end{bmatrix}, \text{ para cada } (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

De aquí que: $Dg(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $Df\big(g(1,1)\big) = Df(2,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Luego, por la Regla de la Cadena, $f \circ g$ es diferenciable en $(1,1)$ y su derivada está dada por:

$$D(f \circ g)(1,1) = Df\big(g(1,1)\big)Dg(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 24 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Nótese que la derivada de f, que es la matriz $Df(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3u^2 & 0 \\ 0 & 2v \end{bmatrix}$, se evaluó en $g(1,1)$ y no en $(1,1)$, donde $g(1,1) = ((1)^2+1, (1)^3) = (2,1)$.

Observación

En general, por la Regla de la Cadena, se tiene lo siguiente.

$$D(f \circ g)(x,y) = Df(u,v)Dg(x,y)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial f_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial f_3}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Donde se considera que $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$ que depende de las variables u y v y con funciones componentes f_1, f_2, f_3; $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$ que depende de las variables x y y; además, $u(x,y) = g_1(x,y)$ y $v(x,y) = g_2(x,y)$ son las funciones componentes de g. Así, las derivadas parciales de las funciones componentes f_1, f_2, f_3 de la función f con respecto a las variables x y y están dadas por:

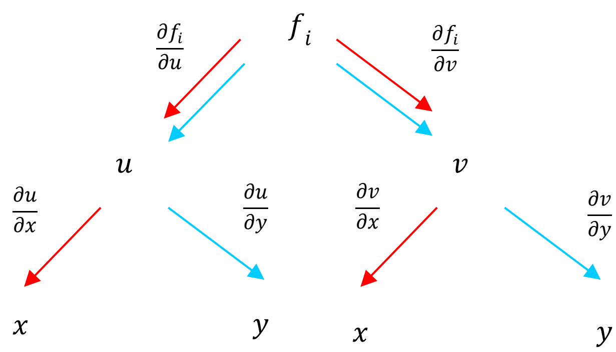
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{\partial f_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{\partial f_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

que son los elementos de la matriz Jacobiana calculada anteriormente. Por lo que, en este caso, para deducir las fórmulas recién enunciadas a partir de un diagrama de árbol, se requiere de un diagrama de árbol para cada una de las funciones componentes f_1, f_2, f_3 de la función f, como el que se muestra en la figura 3.7.

Figura 3.7 Diagrama de árbol del ejemplo 3 sobre regla de la cadena



Fuente: Elaboración Propia

Del cual se establece que:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} = \frac{\partial f_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial f_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_i}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

para $i = 1, 2, 3$. La primera fórmula se obtiene de sumar los productos de las derivadas parciales que se encuentran sobre la misma trayectoria que conduce desde la función principal f_i hasta la variable x (pasando por las diferentes variables u, v). Análogamente, la segunda fórmula se obtiene de la suma de las multiplicaciones de las derivadas parciales ubicadas sobre las dos diferentes trayectorias que unen a la función f_i con la variable y (la primera trayectoria pasando por la variable u y la segunda por la variable v).

Continuando con las funciones del ejemplo 3, $f(u,v) = (u+v, u^3, v^2)$ y $g(x,y) = (x^2+1, y^3)$, para $i = 1$ se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = (1)(2x) + (1)(0) = 2x$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = (1)(0) + (1)(3y^2) = 3y^2$$

Donde $f_1(u,v) = u + v$, $u(x,y) = g_1(x,y) = x^2 + 1$ y $v(x,y) = g_2(x,y) = y^3$. Análogamente, para $i = 2$:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = (3u^2)(2x) + (0)(0) = 6u^2x = 6(x^2+1)^2x$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = (3u^2)(0) + (0)(3y^2) = 0$$

Donde $f_2(u,v) = u^3$, $u(x,y) = g_1(x,y) = x^2 + 1$ y $v(x,y) = g_2(x,y) = y^3$.

Para $i = 3$:

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{\partial f_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = (0)(2x) + (2v)(0) = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{\partial f_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = (0)(0) + (2v)(3y^2) = 6vy^2 = 6(y^3)(y^2) = 6y^5$$

Donde $f_3(u,v) = v^2$, $u(x,y) = g_1(x,y) = x^2 + 1$ y $v(x,y) = g_2(x,y) = y^3$.

Es decir:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 3y^2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 6x(x^2+1)^2 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{\partial f_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{\partial f_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 6y^5$$

O bien, formando la matriz:

$$D(f \circ g)(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 3y^2 \\ 6x(x^2+1)^2 & 0 \\ 0 & 6y^5 \end{bmatrix}$$

Finalmente, evaluando en $(1,1)$, se tiene como resultado la matriz: $D(f \circ g)(1,1) = \begin{bmatrix} 2(1) & 3(1)^2 \\ 6(1)((1)^2+1)^2 & 0 \\ 0 & 6(1)^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 24 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, la cual coincide con la matriz obtenida de la multiplicación de las matrices $Df\big(g(1,1)\big) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $Dg(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, tal como se vio inicialmente en este ejemplo.

4. Sean $f(x,y) = (x^2 + cosy,\ e^{x+y})$ y $g(u,v) = \big(e^{u^2},\ u - senv\big)$. Calcula $D(f \circ g)(0,0)$ usando la regla de la cadena. (Adaptado a partir de Marsden y Tromba, 1991, p. 140).

Solución:

En este caso, $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Las funciones f y g son diferenciables en todo $\mathbb{R}^2$ (por el Criterio de Diferenciabilidad). Además, sus derivadas son las matrices:

$$Dg(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial g_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g_2}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ue^{u^2} & 0 \\ 1 & -cosv \end{bmatrix}, \text{ para cada } (u,v) \in \mathbb{R}^2, \text{ y}$$

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -seny \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{bmatrix}, \text{ para cada } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

De aquí que: $Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ y $Df\big(g(0,0)\big) = Df(1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ e & e \end{bmatrix}$. Luego, por la Regla de la Cadena, $f \circ g$ es diferenciable en $(0,0)$ y su derivada está dada por:

$$D(f \circ g)(0,0) = Df\big(g(0,0)\big)Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ e & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e & -e \end{bmatrix}.$$

Nótese que la derivada de f, que es la matriz $Df(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -seny \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{bmatrix}$, se evaluó en $g(0,0)$ y no en $(0,0)$, donde $g(0,0) = \big(e^{(0)^2}, 0 - sen0\big) = (e^0, -sen0) = (1,0)$.

Observación

En general, por la Regla de la Cadena, se tiene lo siguiente.

$$D(f \circ g)(u,v) = Df(x,y)Dg(u,v)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial g_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g_2}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

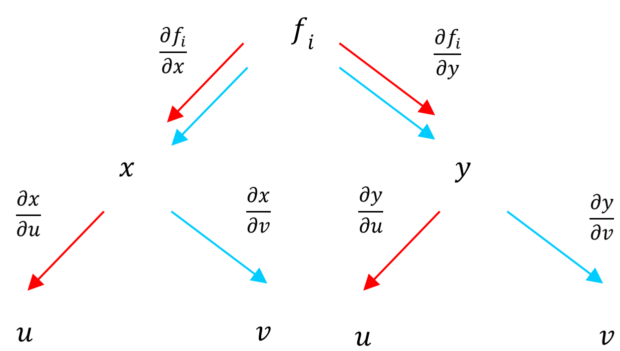
Donde se considera que $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$ que depende de las variables x y y y con funciones componentes f_1, f_2; $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$ que depende de las variables u y v; además, $x(u,v) = g_1(u,v)$ y $y(u,v) = g_2(u,v)$ son las funciones componentes de g. Así, las derivadas parciales de las funciones componentes f_1, f_2 de la función f con respecto a las variables u y v están dadas por:

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial v} = \frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u} = \frac{\partial f_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial v} = \frac{\partial f_2}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

que son las entradas de la matriz Jacobiana calculada anteriormente. En este caso, para deducir las fórmulas recién enunciadas a partir de un diagrama de árbol, nuevamente se requiere de un diagrama de árbol para cada una de las funciones componentes f_1, f_2 de la función f, como el que se muestra en la figura 3.8.

Figura 3.8 Diagrama de árbol del ejemplo 4 sobre regla de la cadena



Fuente: Elaboración Propia

Del cual se establece que:

$$\frac{\partial f_i}{\partial u} = \frac{\partial f_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial v} = \frac{\partial f_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

para $i = 1, 2$. La primera fórmula se obtiene de sumar los productos de las derivadas parciales que se encuentran sobre la misma trayectoria que une a la función principal f_i con la variable u (pasando por las diferentes variables x, y). Análogamente, la segunda fórmula se obtiene de la suma de las multiplicaciones de las derivadas parciales ubicadas sobre las dos diferentes trayectorias que conducen desde la función f_i hasta la variable v (la primera trayectoria pasando por la variable x y la segunda por la variable y).

Continuando con $f(x,y) = (x^2 + cosy,\ e^{x+y})$ y $g(u,v) = \left(e^{u^2},\ u - senv\right)$, que son las funciones del ejemplo 4, para $i = 1$ se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$= (2x)\left(2ue^{u^2}\right) + (-seny)(1)$$
calculando las derivadas indicadas

$$= \left(2e^{u^2}\right)\left(2ue^{u^2}\right) + \left(-sen(u - senv)\right)(1)$$
sustituyendo $x = e^{u^2}$ *y* $y = u - senv$

$$= 4ue^{2u^2} - sen(u - senv)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial v} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$= (2x)(0) + (-seny)(-cosv)$$
calculando las derivadas indicadas

$$= \left(2e^{u^2}\right)(0) + \left(-sen(u - senv)\right)(-cosv)$$
sustituyendo $x = e^{u^2}$ *y* $y = u - senv$

$$= sen(u - senv)cosv$$

Donde $f_1(x,y) = x^2 + cosy$, $x(u,v) = g_1(u,v) = e^{u^2}$ y $y(u,v) = g_2(u,v) = u - senv$. Análogamente, para $i = 2$:

$$\frac{\partial f_2}{\partial u} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$= (e^{x+y})\left(2ue^{u^2}\right) + (e^{x+y})(1)$$
calculando las derivadas indicadas

$$= \left(e^{e^{u^2}+u-senv}\right)\left(2ue^{u^2}\right) + \left(e^{e^{u^2}+u-senv}\right)(1)$$
sustituyendo $x = e^{u^2}$ *y* $y = u - senv$

$$= 2ue^{u^2}e^{e^{u^2}+u-senv} + e^{e^{u^2}+u-senv}$$

$$= \left(2ue^{u^2} + 1\right)e^{e^{u^2}+u-senv}$$

$\frac{\partial f_2}{\partial v} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$

$= (e^{x+y})(0) + (e^{x+y})(-cosv)$
calculando las derivadas indicadas

$= \left(e^{e^{u^2}+u-senv}\right)(0) + \left(e^{e^{u^2}+u-senv}\right)(-cosv)$
sustituyendo $x = e^{u^2}$ *y* $y = u - senv$

$= 0 - e^{e^{u^2}+u-senv}cosv$

$= -e^{e^{u^2}+u-senv}cosv$

Donde $f_2(x,y) = e^{x+y}$, $x(u,v) = g_1(u,v) = e^{u^2}$ y $y(u,v) = g_2(u,v) = u - senv$.

Es decir:

$\frac{\partial f_1}{\partial u} = 4ue^{2u^2} - sen(u - senv)$ $\qquad \frac{\partial f_1}{\partial v} = sen(u - senv)cosv$

$\frac{\partial f_2}{\partial u} = \left(2ue^{u^2} + 1\right)e^{e^{u^2}+u-senv}$ $\qquad \frac{\partial f_2}{\partial v} = -e^{e^{u^2}+u-senv}cosv$

O bien, formando la matriz:

$$D(f \circ g)(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4ue^{2u^2} - sen(u - senv) & sen(u - senv)cosv \\ \left(2ue^{u^2} + 1\right)e^{e^{u^2}+u-senv} & -e^{e^{u^2}+u-senv}cosv \end{bmatrix}$$

Finalmente, evaluando en $(0,0)$, se tiene como resultado la matriz:

$$D(f \circ g)(0,0) = \begin{bmatrix} 4(0)e^{2(0)^2} - sen(0 - sen0) & sen(0 - sen0)cos0 \\ \left(2(0)e^{(0)^2} + 1\right)e^{e^{(0)^2}+0-sen0} & -e^{e^{(0)^2}+0-sen0}cos0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4(0)e^0 - sen(0 - 0) & sen(0 - 0)cos0 \\ (2(0)e^0 + 1)e^{e^0+0-0} & -e^{e^0+0-0}cos0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4(0)(1) - sen(0) & sen(0)cos0 \\ (2(0)(1) + 1)e^1 & -e^1cos0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 - sen(0) & sen(0)cos0 \\ (0 + 1)e^1 & -e^1cos0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 - 0 & (0)(1) \\ e^1 & -e^1(1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e & -e \end{bmatrix}$$

la cual coincide con la matriz obtenida de la multiplicación de las matrices $Df\big(g(0,0)\big) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ e & e \end{bmatrix}$ y $Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, como se vio inicialmente en este ejemplo.

5. Sea $u = x^2 + yz$, con $x = rsent$, $y = rcost$ y $z = rsen^2t$. Calcula $\frac{\partial u}{\partial r}$ y $\frac{\partial u}{\partial t}$ usando la regla de la cadena. (Adaptado a partir de Leithold, 1998, p. 968).

Solución:

Primer Método (Regla de la Cadena con Matrices):

Si se considera $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ como la función definida por $f(x,y,z) = x^2 + yz$ y $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ como la función definida por $g(r,t) = (rsent,\ rcost,\ rsen^2t)$, entonces sus derivadas son las matrices:

$$Dg(r,t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r}(r,t) & \frac{\partial g_1}{\partial t}(r,t) \\ \frac{\partial g_2}{\partial r}(r,t) & \frac{\partial g_2}{\partial t}(r,t) \\ \frac{\partial g_3}{\partial r}(r,t) & \frac{\partial g_3}{\partial t}(r,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sent & rcost \\ cost & -rsent \\ sen^2t & 2rsentcost \end{bmatrix}$$, para cada $(r,t) \in \mathbb{R}^2$, y

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \end{bmatrix} = [2x \quad z \quad y]$$, para cada $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

De aquí que: $Df\big(g(r,t)\big) = Df(rsent, rcost, rsen^2t) = [2rsent \quad rsen^2t \quad r\cos t]$, para cada $(r,t) \in \mathbb{R}^2$, que se obtiene de reemplazar x por $rsent$, y por $rcost$ y z por $rsen^2t$ en la matriz $Df(x,y,z) = [2x \quad z \quad y]$. Por la Regla de la Cadena, $f \circ g$ es diferenciable en cada $(r,t) \in \mathbb{R}^2$ y su derivada está dada por:

$$D(f \circ g)(r,t) = Df\big(g(r,t)\big)Dg(r,t)$$

$$= [2rsent \quad rsen^2t \quad rcost] \begin{bmatrix} sent & rcost \\ cost & -rsent \\ sen^2t & 2rsentcost \end{bmatrix}$$

$$= [2rsen^2t + rsen^2tcost + r\cos t\, sen^2t \quad 2r^2sentcost - r^2sen^3t + 2r^2sent\cos^2 t]$$

$$= [2rsen^2t + 2rsen^2tcost \quad 2r^2sentcost - r^2sen^3t + 2r^2sent\cos^2 t]$$

$$= [2rsen^2t(1 + cost) \quad r^2sent(2cost - sen^2t + 2\cos^2 t)].$$

Como $u = x^2 + yz = f(x,y,z) = f(rsent, rcost, rsen^2t) = f\big(g(r,t)\big)$, es decir, $u = (f \circ g)\,(r,t)$, entonces:

$$Du(r,t) = D(f \circ g)(r,t)$$

$$= [2rsen^2t(1 + cost) \quad r^2sent(2cost - sen^2t + 2\cos^2 t)].$$

Como también se tiene que $Du(r,t) = \left[\frac{\partial u}{\partial r}(r,t) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r,t)\right]$, entonces:

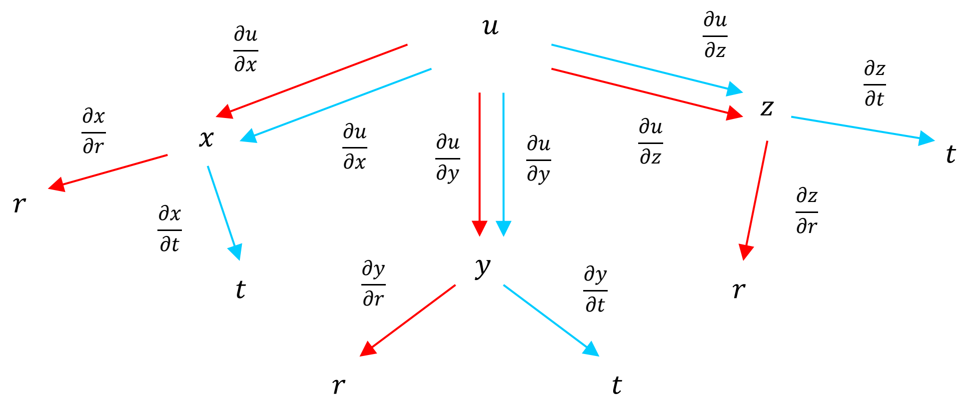
$$\frac{\partial u}{\partial r}(r,t) = 2rsen^2t(1 + cost)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r,t) = r^2sent(2cost - sen^2t + 2\cos^2 t)$$

Segundo Método (Regla de la Cadena con Diagrama de Árbol):

Como $u(x,y,z) = x^2 + yz$, con $x(r,t) = rsent$, $y(r,t) = r\cos t$ y $z(r,t) = rsen^2t$, entonces las fórmulas para calcular las derivadas parciales, $\frac{\partial u}{\partial r}$ y $\frac{\partial u}{\partial t}$, pueden ser establecidas usando el diagrama de árbol de la figura 3.9.

Figura 3.9 Diagrama de árbol del ejemplo 5 sobre regla de la cadena



Fuente: Elaboración Propia

De aquí que:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}$$

Donde la primera fórmula se obtiene de sumar los productos de las derivadas parciales que se encuentran sobre la misma trayectoria que conduce desde la función principal u hasta la variable r (pasando por las diferentes variables x, y, z). Análogamente, la segunda fórmula se obtiene de la suma de las multiplicaciones de las derivadas parciales ubicadas sobre las tres diferentes trayectorias que unen a la función u con la variable t (la primera trayectoria pasando por la variable x, la segunda por la variable y y la tercera por z).

Luego:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$= 2x(sent) + z(cost) + y(sen^2t)$$
calculando las derivadas indicadas

$$= 2(rsent)(sent) + (rsen^2t)(cost) + (rcost)(sen^2t)$$
sustituyendo $x = rsent, y = rcost \;\; y \;\; z = rsen^2t$

$$= 2rsen^2t + 2rcostsen^2t$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$= 2x(rcost) + z(-rsent) + y(2rsentcost)$$
calculando las derivadas indicadas

$$= 2(rsent)(rcost) + (rsen^2t)(-rsent) + (rcost)(2rsentcost)$$
sustituyendo $x = rsent, y = rcost \;\; y \;\; z = rsen^2t$

$$= 2r^2sentcost - r^2sen^3t + 2r^2\cos^2 t\, sent$$

Donde: $u = x^2 + yz$, con $x = rsent$, $y = rcost$ y $z = rsen^2t$

3.3.3 Aplicaciones de la regla de la cadena

En esta sección se presentan algunos ejemplos de situaciones clásicas que pueden modelarse y resolverse aplicando la regla de la cadena; específicamente, con diagrama de árbol.

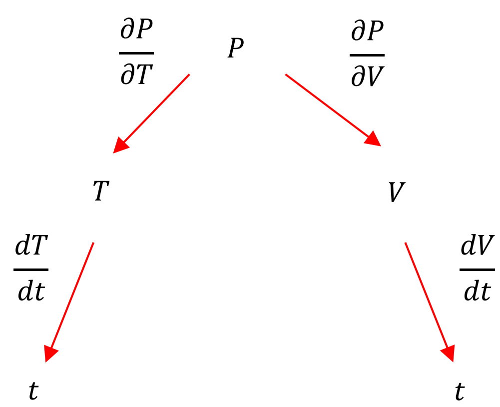
1. Supongamos que la presión P en kilopascales (kPa), el volumen V en litros (L) y la temperatura T en Kelvin (K) de un mol de un gas ideal, están relacionados por la ecuación $PV = 8.31T$. Encuentra la tasa en la cual la presión está cambiando con respecto al tiempo, cuando la temperatura es $200\,K$ e incrementándose en una tasa de $0.15\,K/s$ y el volumen es $50\,L$ e incrementándose en una tasa de $0.25\,L/s$. (Adaptado a partir de Stewart, 1999, p. 953).

Solución:

Se considera la función $P(T,V) = \frac{8.31T}{V}$. Por la Regla de la Cadena (ver el diagrama de árbol de la figura 3.10), la tasa de variación de la presión P con respecto al tiempo t está dada por:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial T} \cdot \frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V} \cdot \frac{dV}{dt}$$

Figura 3.10 Diagrama de árbol del ejemplo 1 sobre aplicaciones de la regla de la cadena



Fuente: Elaboración Propia

De este modo:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial T} \cdot \frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{8.31}{V} \cdot \frac{dT}{dt} - \frac{8.31T}{V^2} \cdot \frac{dV}{dt}$$

Como $T = 200\,K$, $\frac{dT}{dt} = 0.15\,K/s$, $V = 50\,L$ y $\frac{dV}{dt} = 0.25\,L/s$, entonces la tasa de variación de la presión con respecto al tiempo queda como:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{8.31}{50}(0.15) - \frac{8.31(200)}{(50)^2}(0.25) = 0.02493 - 0.1662 = -0.14127$$

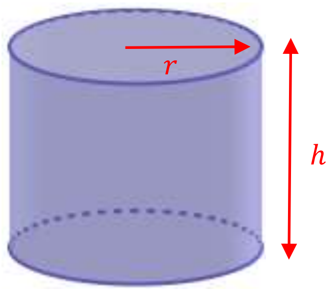
Por lo tanto: La presión decrece en una tasa de $0.14127\,kPa/s$.

2. Al calentar un cilindro circular recto sólido, su radio r y altura h aumentan; por lo tanto, también lo hace el área S de su superficie. Supongamos que en el instante en que $r = 5\,cm$ y $h = 10\,cm$, r está creciendo a razón de 0.1 cm/hr y h aumenta a 0.2 cm/hr. ¿Qué tan rápido crece S en ese instante? (Adaptado a partir de Purcell, Varberg y Rigdon, 2007, p. 648).

Solución:

En primer lugar, es necesario establecer la función que representa el área del cilindro circular recto. Teniendo en cuenta la forma del cilindro (ver la figura 3.11), tanto su base como su tapa son círculos de radio r, por lo que el área de cada uno está dada por πr^2; así, si S_1 representa el área de la base y la tapa del cilindro se tiene que: $S_1 = 2\pi r^2$. Además, el "cuerpo" del cilindro es un rectángulo cuya área está dada como el producto de la base por la altura donde, en este caso, la base es el perímetro del círculo, $2\pi r$, y la altura es h; si S_2 representa dicha área, se tiene que: $S_2 = 2\pi rh$. De este modo, el área total de la superficie S del cilindro circular recto es la suma de S_1 y S_2, esto es: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, que depende de la altura h y del radio r.

Figura 3.11 Cilindro circular recto



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

Luego, derivando parcialmente:

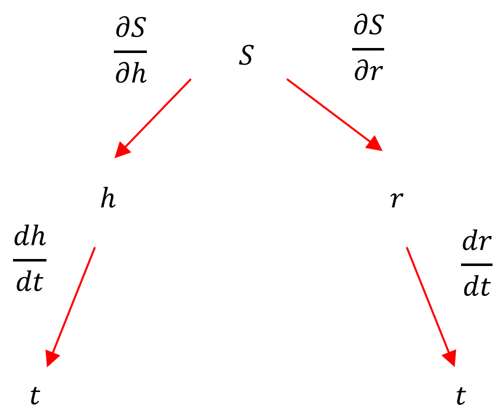
$\frac{\partial S}{\partial h} = 2\pi r$ y $\frac{\partial S}{\partial r} = 4\pi r + 2\pi h$, con $h, r > 0$.

Como el radio r y la altura h son funciones del tiempo t, entonces la tasa de variación del área de la superficie del cilindro con respecto al tiempo está dada por:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt} + \frac{\partial S}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt}$$

Ver el diagrama de árbol de la figura 3.12.

Figura 3.12 Diagrama de árbol del ejemplo 2 sobre aplicaciones de la regla de la cadena



Fuente: Elaboración Propia

De este modo:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dt} + \frac{\partial S}{\partial r} \cdot \frac{dr}{dt} = (2\pi r)\frac{dh}{dt} + (4\pi r + 2\pi h)\frac{dr}{dt}$$

Como $h = 10\ cm$, $\frac{dh}{dt} = 0.2\ cm/hr$, $r = 5\ cm$ y $\frac{dr}{dt} = 0.1\ cm/hr$, entonces la tasa de variación del área de la superficie con respecto al tiempo queda como:

$\frac{dS}{dt} = (2\pi r)\frac{dh}{dt} + (4\pi r + 2\pi h)\frac{dr}{dt}$

$= 2\pi(5)(0.2) + [4\pi(5) + 2\pi(10)](0.1)$

$= 2\pi + 4\pi$

$= 6\pi$

Por lo tanto: El área de la superficie del cilindro crece en una tasa de $6\pi\ cm^2/hr$.

3.4 Vector gradiente y derivada direccional

En las secciones 3.1.4 y 3.1.5 se vio la interpretación geométrica y la interpretación física de las derivadas parciales de una función real de dos variables; es decir, que éstas representan las tasas de cambio de dicha función o las pendientes de su gráfica en la dirección de los ejes coordenados. Específicamente, que la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ se interpreta como la tasa de variación de f o la pendiente de la superficie $z = f(x,y)$ en la dirección del eje x y la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$ se interpreta como la tasa de variación de f o la pendiente de la superficie $z = f(x,y)$ en la dirección del eje y, siempre que f es una función real que depende de las variables x y y. En esta sección se generalizará el concepto de derivada parcial de modo que se definirá una derivada que representa la tasa de variación de la función o la pendiente de su gráfica en cualquier dirección, esto es, se definirá la derivada direccional. Otro concepto importante que permitirá caracterizar a la derivada direccional es el de gradiente, el cual se define a continuación.

3.4.1 Definición de gradiente

Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. El gradiente de f en $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es el vector definido por

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \frac{\partial f}{\partial x_2}(P), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)\right)$$

En particular, si $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, su gradiente se define por:

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P)\right), \text{ donde } P = (x,y)$$

Análogamente, para $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, se tiene que:

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P), \frac{\partial f}{\partial z}(P)\right), \text{ donde } P = (x,y,z)$$

Ejemplos

1. Si $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, entonces su gradiente en cada $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ está dado por:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

Más aún, el gradiente puede ser evaluado en un punto específico de su dominio, en este caso, en cualquier terna ordenada distinta del origen; por ejemplo, en $(1,1,-2)$, de modo que:

$$\nabla f(1,1,-2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,-2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,-2), \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,-2)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-2)^2}}, \frac{1}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-2)^2}}, \frac{-2}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-2)^2}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

2. Si $f(x,y,z) = 2xy + 5z^3$, entonces su gradiente en cada $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ está dado por:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) = (2y, 2x, 15z^2)$$

Además, es posible evaluar el gradiente en cualquier terna ordenada; por ejemplo, en $(0,0,1)$, como se muestra a continuación:

$$\nabla f(0,0,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,1), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,1), \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1)\right) = \big(2(0), 2(0), 15(1)\big) = (0,0,15)$$

3. Si $f(x,y) = cos(x-y)\, ln\, y$, entonces su gradiente en cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $y > 0$ está dado por:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(-sen(x-y)\, ln\, y, \frac{cos(x-y)}{y} + sen(x-y)\, ln\, y\right)$$

Más aún, el gradiente puede ser evaluado en cualquier par ordenado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $y > 0$; por ejemplo, en $(0,\pi)$, de modo que:

$$\nabla f(0,\pi) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi), \frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi)\right)$$

$$= \left(-sen(0-\pi)\, ln\, \pi, \frac{cos(0-\pi)}{\pi} + sen(0-\pi)\, ln\, \pi\right)$$

$$= \left(-sen(-\pi)\, ln\, \pi, \frac{cos(-\pi)}{\pi} + sen(-\pi)\, ln\, \pi\right) = \left(0, -\frac{1}{\pi}\right)$$

Es importante destacar que el gradiente de una función real de n variables es un elemento en $\mathbb{R}^n$, pero recibe el nombre de vector por su aspecto geométrico, es decir, se está considerando como un segmento de recta dirigido, dotado de una magnitud y una dirección. Para el caso de los vectores en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$, estos se pueden representar fácilmente como flechas que inician en el origen de coordenadas y terminan en el punto asociado a un par ordenado, cuando se trata de vectores en $\mathbb{R}^2$, o bien, a una terna ordenada cuando los vectores están en $\mathbb{R}^3$, tal como se muestra en la figura 3.13(a)-(b).

Figura 3.13 (a) Ejemplos de vectores en $\mathbb{R}^2$ (vectores en el plano)

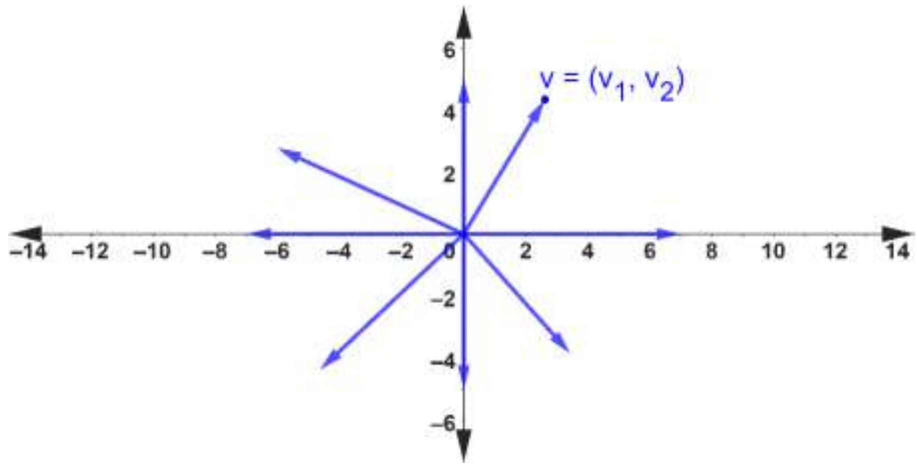
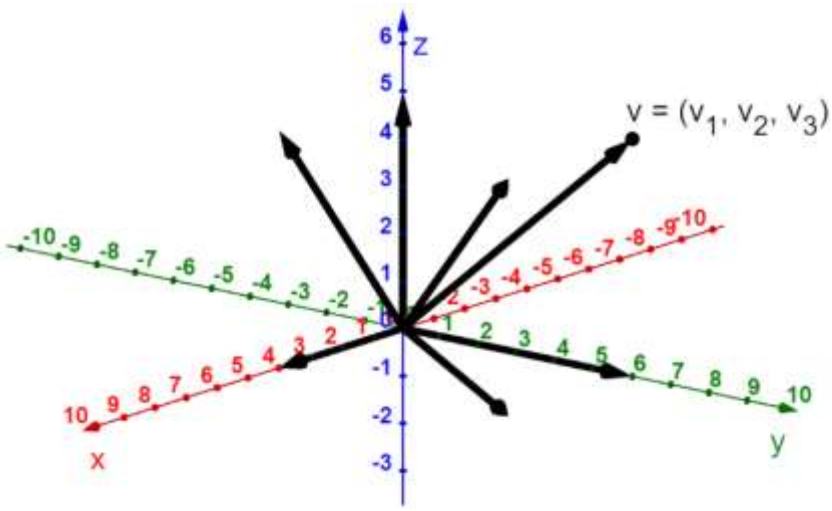


Figura 3.13 (b) Ejemplos de vectores en $\mathbb{R}^3$ (vectores en el espacio)



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra Clásico y GeoGebra 3D

Más adelante, se ocuparán también los siguientes conceptos sobre la teoría de vectores.

Si $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ y $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ son dos vectores cualesquiera en $\mathbb{R}^n$ y α es un escalar (número real), entonces se define lo siguiente:

Suma entre v y w:

$$v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n)$$

Múltiplo escalar αv:

$$\alpha v = (\alpha v_1, \alpha v_2, \ldots, \alpha v_n)$$

Producto Punto (o ***producto escalar***) entre v y w:

$$v \bullet w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n$$

Norma (o ***longitud*** o ***magnitud***) de v:

$$\|v\| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + \cdots + {v_n}^2}$$

Además, se dice que v es un *vector unitario* si su norma es igual a 1. Si v es un vector no unitario distinto del vector nulo o cero (vector con todas sus coordenadas iguales a 0), entonces: $v^* = \frac{v}{\|v\|}$ es un vector unitario y con la misma dirección que v.

Por ejemplo, para los vectores $v = (-1,2,6)$ y $w = (3,0,-2)$ se tiene lo siguiente:

$$v + w = (-1,2,6) + (3,0,-2) = \big(-1+3, 2+0, 6+(-2)\big) = (2,2,4)$$

$$5v = 5(-1,2,6) = (5(-1), 5(2), 5(6)\ ) = (-5, 10, 30)$$

$$v \bullet w = (-1,2,6) \bullet (3,0,-2) = (-1)(3) + (2)(0) + (6)(-2) = -3 + 0 - 12 = -15$$

$$\|v\| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (6)^2} = \sqrt{1+4+36} = \sqrt{41}$$

$$\|w\| = \sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

De aquí que, ni v ni w son vectores unitarios; sin embargo, los vectores $v^* = \frac{v}{\|v\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{41}}, \frac{2}{\sqrt{41}}, \frac{6}{\sqrt{41}}\right)$ y $w^* = \frac{w}{\|w\|} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ sí son unitarios.

Una vez revisados algunos conceptos básicos de la teoría de vectores en $\mathbb{R}^n$, se está en condiciones de definir y caracterizar a la derivada direccional.

3.4.2 Definición de derivada direccional

Sean $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función, $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un punto en $\mathbb{R}^n$ y $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ un vector en $\mathbb{R}^n$ cualesquiera. La derivada direccional de f en P en la dirección de v está definida por

$$D_v f(P) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P+tv) - f(P)}{t}$$

siempre que el límite existe. O bien:

$$D_v f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1+tv_1, x_2+tv_2, \dots, x_n+tv_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{t}$$

donde $P + tv = (x_1, x_2, \dots, x_n) + t(v_1, v_2, \dots, v_n) = (x_1 + tv_1, x_2 + tv_2, \dots, x_n + tv_n)$.

De este modo, para $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la derivada direccional se define como se muestra a continuación:

$$D_v f(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv_1, y+tv_2) - f(x,y)}{t}$$

Además, si $v = (1,0)$, se tiene que:

$$D_v f(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t,y) - f(x,y)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

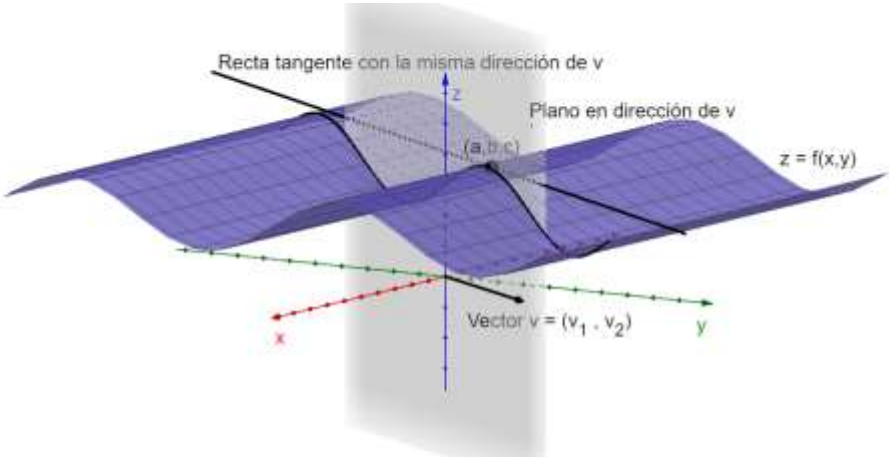
Análogamente, si $v = (0,1)$, entonces:

$$D_v f(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x,y+t) - f(x,y)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Es decir, las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son casos particulares de la derivada direccional, en los que la tasa de cambio de la función f o la pendiente de la superficie $z = f(x,y)$ es en la dirección de vectores con la misma dirección de los ejes coordenados.

En la figura 3.14 se muestra la interpretación geométrica de la derivada direccional de una función real de dos variables como la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección entre la gráfica de la función y el plano en la dirección de un vector en $\mathbb{R}^2$. Específicamente, $D_v f(a,b)$ representa el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección entre la superficie $z = f(x,y)$ y el plano que tiene la misma dirección que el vector $v = (v_1, v_2)$, en el punto (a,b,c) tal que $f(a,b) = c$.

Figura 3.14 Interpretación geométrica de la derivada direccional $D_v f(a,b)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

A continuación, se caracterizará a la derivada direccional de una manera sencilla, a partir del producto punto entre su vector gradiente y un vector unitario.

3.4.3 Caracterización de la derivada direccional

Sean $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función, $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un punto en $\mathbb{R}^n$ y $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ un vector unitario en $\mathbb{R}^n$. Si f es diferenciable, entonces la derivada direccional de f en P en la dirección de v existe y está dada por

$$D_v f(P) = \nabla f(P) \bullet v = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P)v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(P)v_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)v_n$$

donde $\bullet$ denota el producto punto.

Ejemplos

1. Sea $f(x,y,z) = y^3 e^{-2xz}$. Calcula la derivada direccional de f en el punto $P = (0,1,0)$ en la dirección del vector unitario $v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. (Adaptado a partir de Marsden y Tromba, 1991, p. 148).

   Solución:

   El vector gradiente de f en cada $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ está dado por:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)$$

$$= (-2y^3 z e^{-2xz}, 3y^2 e^{-2xz}, -2xy^3 e^{-2xz})$$

De aquí que:

$$\nabla f(0,1,0) = \left(-2(1)^3(0)e^{-2(0)(0)}, 3(1)^2 e^{-2(0)(0)}, -2(0)(1)^3 e^{-2(0)(0)}\right) = (0,3,0).$$

Luego, por la caracterización de la derivada direccional, dicha derivada de f en el punto $P = (0,1,0)$ en la dirección del vector unitario $v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ está dada por:

$$D_v f(0,1,0) = \nabla f(0,1,0) \bullet v = (0,3,0) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (0)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (3)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (0)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

Es decir: $D_v f(0,1,0) = \frac{3}{\sqrt{3}}$.

2. Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$. Calcula la derivada direccional de f en el punto $P = (4,3)$ en la dirección del vector $v = (1,3)$. (Adaptado a partir de Leithold, 1998, p. 978).

Solución:

El vector gradiente de f en cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ está dado por:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (2x, 2y)$$

De aquí que: $\nabla f(4,3) = (8,6)$. Luego, por la caracterización de la derivada direccional, dicha derivada de f en el punto $P = (4,3)$ en la dirección del vector unitario $v^* = \frac{v}{\|v\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ está dada por:

$$D_{v*}f(4,3) = \nabla f(4,3) \bullet v^* = (8,6) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = (8)\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + (6)\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{8}{\sqrt{10}} + \frac{18}{\sqrt{10}} = \frac{26}{\sqrt{10}}.$$

Es decir: $D_{v*}f(4,3) = \frac{26}{\sqrt{10}}$.

En este segundo ejemplo, nótese que el vector $v = (1,3)$ no es unitario, puesto que su norma es distinta de 1; sin embargo, el vector $v^* = \frac{v}{\|v\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ sí es unitario y tiene la misma dirección del vector v, donde $\|v\| = \sqrt{(1)^2 + (3)^2} = \sqrt{10}$ es la norma de v.

Se finaliza este capítulo estableciendo cómo calcular el plano tangente a una superficie dada a partir del vector gradiente.

3.4.4 Plano tangente

Suponiendo que F es una función real que depende de las variables x, y, z, y que es diferenciable en (a,b,c), una ecuación del plano tangente a la superficie dada por $F(x,y,z) = 0$ en el punto (a,b,c) es $\nabla F(a,b,c) \bullet (x-a, y-b, z-c) = 0$, donde $\bullet$ representa el producto punto; es decir, dicha ecuación es de la forma:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c)(x-a) + \frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)(y-b) + \frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)(z-c) = 0$$

siempre que $\nabla F(a,b,c)$ sea distinto del vector cero.

Más aún, en el caso de que la superficie sea de la forma $z = f(x,y)$, si se define $F(x,y,z) = f(x,y) - z$, el plano tangente a la superficie $F(x,y,z) = 0$ en el punto (a,b,c) tiene una ecuación dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) - (z-c) = 0$$

puesto que $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial F}{\partial z} = -1$.

Ejemplos

1. Encuentra una ecuación del plano tangente al hiperboloide $z^2 - 2x^2 - y^2 = 4$ en el punto $(2, -2{,}4)$. (Adaptado a partir de Larson *et. al.*, 1996, p. 1169).

Solución:

En este caso, la función F está definida por $F(x, y, z) = z^2 - 2x^2 - y^2 - 4$ y el punto de tangencia es $(2, -2{,}4)$. Entonces el vector gradiente de F está dado por: $\nabla F(x, y, z) = (-4x, -2y, 2z)$ que, evaluado en el punto $(2, -2{,}4)$, queda como $\nabla F(2, -2{,}4) = \big(-4(2), -2(-2), 2(4)\big) = (-8{,}4{,}8)$. Luego, una ecuación del plano tangente al hiperboloide $z^2 - 2x^2 - y^2 = 4$ en el punto $(2, -2{,}4)$ está dada como se muestra a continuación:

$\nabla F(2, -2{,}4) \bullet (x - 2, y + 2, z - 4) = 0$

$(-8{,}4{,}8) \bullet (x - 2, y + 2, z - 4) = 0$

$-8(x - 2) + 4(y + 2) + 8(z - 4) = 0$

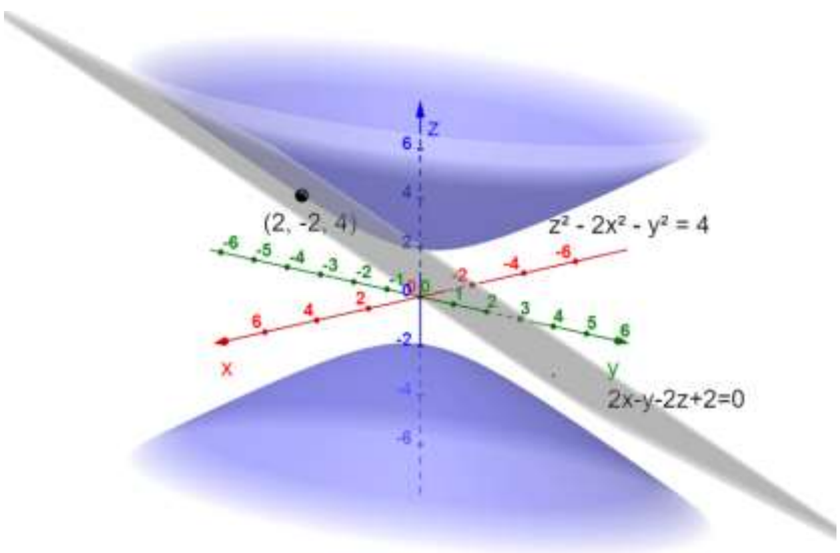
$-8x + 16 + 4y + 8 + 8z - 32 = 0$

$-8x + 4y + 8z - 8 = 0$

$2x - y - 2z + 2 = 0$

Las gráficas del hiperboloide y de su plano tangente se ilustran en la figura 3.15.

Figura 3.15 Gráfica de $z^2 - 2x^2 - y^2 = 4$ y su plano tangente en $(2, -2{,}4)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

2. Halla una ecuación del plano tangente al paraboloide $z = x^2 + y^2$ en el punto $(1, -2{,}5)$. (Adaptado a partir de Purcell *et. al.*, 2007, p. 653).

Solución:

Como la superficie es de la forma $z = f(x, y)$, con $f(x, y) = x^2 + y^2$, y el punto de tangencia es $(1, -2{,}5)$, entonces una ecuación del plano tangente a dicha superficie en el punto indicado se obtiene de la siguiente manera:

$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) - (z - c) = 0$

donde $(a,b,c) = (1,-2,5)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,-2) = 2(1) = 2$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,-2) = 2(-2) = -4$, puesto que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; es decir, la ecuación del plano tangente queda como:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-2)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,-2)(y+2) - (z-5) = 0$$

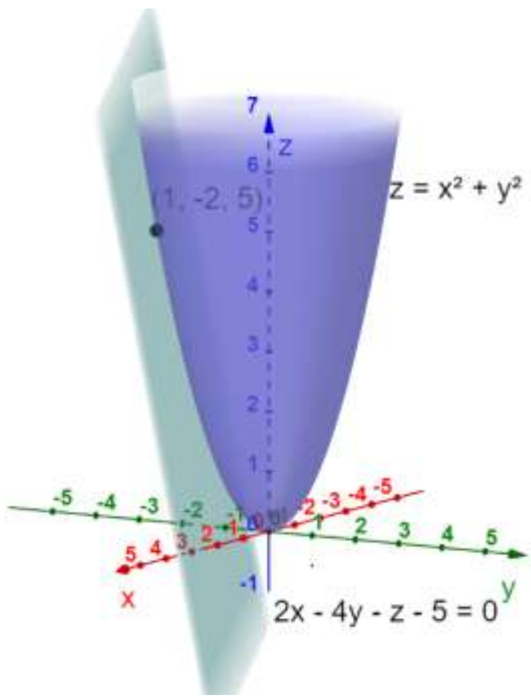
$$2(x-1) - 4(y+2) - (z-5) = 0$$

$$2x - 2 - 4y - 8 - z + 5 = 0$$

$$2x - 4y - z - 5 = 0$$

Las gráficas del paraboloide y de su plano tangente se ilustran en la figura 3.16.

Figura 3.16 Gráfica de $z = x^2 + y^2$ y su plano tangente en $(1,-2,5)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

Ejercicios Propuestos

En los ejercicios 1 a 20, calcula las derivadas parciales, $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$, aplicando las reglas básicas de derivación ordinaria.

1. $f(x,y) = x^5y^3 - x^2y + 5xy$

2. $f(x,y) = \frac{1}{xy}$

3. $f(x,y) = \sqrt{2x + 5y}$

4. $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{3x}$

5. $f(x,y) = xsen(y^2)$

6. $f(x,y) = ln(3x^2) - tan(5y)$

7. $f(x,y) = [ln(xy)]^3$

8. $f(x,y) = e^{x-y}\, cos(x^2y)$

9. $f(x,y) = e^{cos\,x} + xy^3$

10. $f(x,y) = \frac{5x^2y}{x^4+y^4}$

11. $f(x,y) = \frac{ln\,y}{x^2}$

12. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{xy}}$

13. $f(x,y) = e^{3x+5y}$

14. $f(x,y) = cos^2\,x\; sen(2y)$

15. $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

16. $f(x,y) = cos(xy) + x\,cos\,y$

17. $f(x,y) = e^x\,ln\,y$

18. $f(x,y) = xye^{x-y}$

19. $f(x,y) = y^2 + sen(x^2 + 1)$

20. $f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$

21. Halla las pendientes de la superficie $z = 16 - 3x^2 - 2y^2$ en el punto $(2, -1, 2)$, en la dirección de x y en la dirección de y.

22. Calcula la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = x^2 + y^2$ con el plano $x = 1$ en el punto $(1, 2, 5)$. Dibuja la curva en cuestión, tomando en cuenta que la pendiente buscada es la interpretación geométrica de una derivada parcial. (Adaptado a partir de Leithold, 1998, p. 954).

23. La temperatura, en grados Celsius, en cualquier punto (x, y) de una placa metálica está dada por $T(x, y) = \frac{20}{1+x^2+y^2}$. Encuentra la razón de cambio de la temperatura respecto a la distancia, en metros, recorrida a lo largo de la placa en la dirección positiva de los ejes x y y, en el punto $(2,1)$. (Adaptado a partir de Stewart, 1999, p. 942).

24. El volumen V de un cono circular recto está dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, donde r es el radio y h la altura. Si el radio r se mantiene fijo en 5 in, determina la razón de cambio del volumen con respecto a la altura h, cuando $h = 12\ in$. (Adaptado a partir de Purcell *et. al.*, 2007, p. 628).

25. De acuerdo con la *Ley de los Gases Ideales*, la presión P, la temperatura T y el volumen V de un gas confinado, se relacionan mediante la fórmula $PV = kT$, donde k es una constante. Si el volumen es de $150\ in^3$ y la temperatura es de $200\ K$ (Kelvin), encuentra la razón de cambio de la presión (en libras por pulgada cuadrada, lb/in^2) con respecto a la temperatura y con respecto al volumen. (Adaptado a partir de Purcell *et. al.*, 2007, p. 628).

En los ejercicios 26 a 33, calcula la matriz Jacobiana de f y determina el conjunto más grande donde es diferenciable.

26. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$.

27. $f(x, y, z) = \left(e^z\, ln(x^2 + y^2),\ xysen(z^2 + 1)\right)$.

28. $f(x, y) = \left(xseny,\ y^2cos(x - y),\ \frac{1}{xy}\right)$.

29. $f(x) = \left(tan(2x - 1),\ e^{-x},\ x^{-3/2}\right)$.

30. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

31. $f(x, y, z) = (z^2 + ln(xy),\ e^z\, cos(x^2 + y^2),\ x^2yz^2)$.

32. $f(x, y, z) = \left(e^{x^2+1}sen(y^2 + 2z),\ xz - y\right)$.

33. $f(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2},\ \frac{1}{x-y}\right)$.

34. Demuestra que la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & si \quad (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x, y) = (0,0) \end{cases}$ no es diferenciable en $(0,0)$. (Adaptado a partir de Leithold, 1998, p. 954).

35. Sean $f(x, y) = 2xy$ y $g(t) = (e^{-t},\ cos\, t)$. Calcula $D(f \circ g)(t)$ usando la regla de la cadena. (Adaptado a partir de Marsden y Tromba, 1991, p. 142).

36. Sean $f(u, v, w) = u^2 + v^2 + w^2$ y $g(x, y, z) = (xy,\ z^2,\ e^{-xz})$. Calcula $D(f \circ g)(x, y, z)$ usando la regla de la cadena. (Adaptado a partir de Marsden y Tromba, 1991, p. 139).

37. Sean $f(u, v) = (tan(u - 1) + e^v,\ u^3 - v^3)$ y $g(x, y) = (e^{x-y},\ x + y)$. Calcula $D(f \circ g)(1,1)$ usando la regla de la cadena. (Adaptado a partir de Marsden y Tromba, 1991, p. 143).

38. Sea $u = x^2 - y^2$, con $x = 2r + s$ y $y = r - 3s$. Calcula $\frac{\partial u}{\partial r}(r, s)$ y $\frac{\partial u}{\partial s}(r, s)$ usando la regla de la cadena. (Adaptado a partir de Leithold, 1998, p. 973).

39. La temperatura, en grados Celsius, en cualquier punto (x, y) de una placa metálica está dada por $T(x, y) = e^{2x-3y}$. Si una hormiga se desplaza sobre la placa, de modo que $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 3\ ft/min$, determina cómo cambia la temperatura con el tiempo cuando ésta cruza el origen. (Adaptado a partir de Purcell *et. al.*, 2007, p. 651).

40. Se llena con agua un tanque de forma cilíndrica de modo que, en cierto instante, la altura es de $7\ m$ y aumenta a razón de $0.5\ m/min$, mientras que el radio es de $2\ m$ y aumenta a razón de $0.2\ m/min$. ¿Qué tan rápido aumenta el volumen en ese instante? (Adaptado a partir de Purcell *et. al.*, 2007, p. 651).

41. La presión de un mol de un gas contenido en un recipiente se incrementa a una tasa de $0.02\ kPa/s$ y la temperatura aumenta a una tasa de $0.01\ K/s$. Considera la ecuación $PV = 8.31T$ para encontrar la tasa de cambio del volumen con respecto al tiempo (en litros por segundo, L/s), cuando la presión es $15\ kPa$ y la temperatura es $120\ K$. (Adaptado a partir de Stewart, 1999, p. 959).

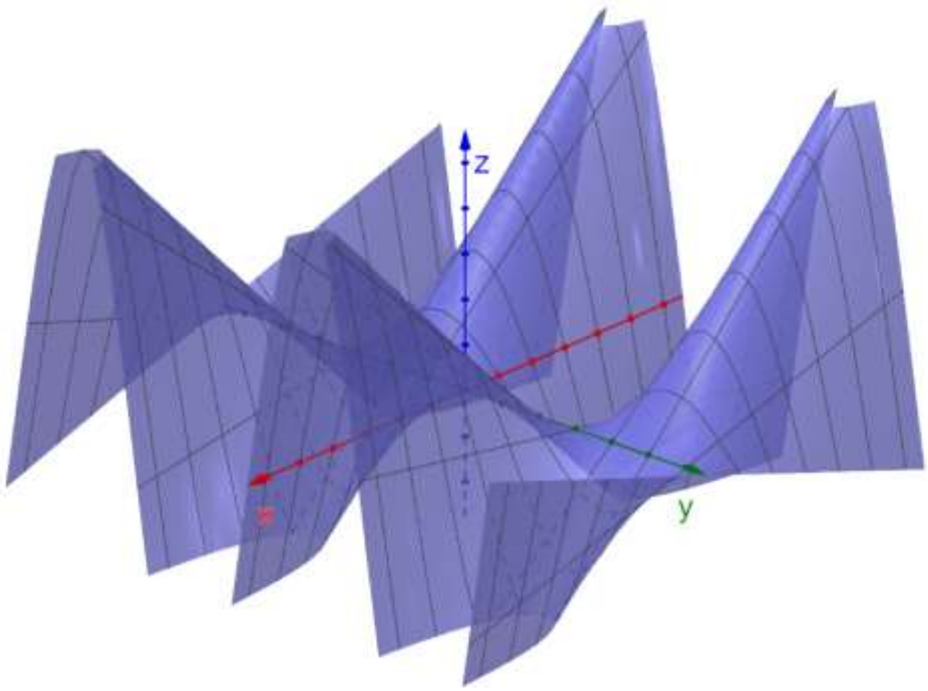
42. Calcula la derivada direccional de $f(x,y,z) = x^2z + 2y^3$ en el punto $P = (1,1,2)$ en la dirección del vector $v = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$. (Adaptado a partir de Marsden y Tromba, 1991, p. 154).

43. Calcula la derivada direccional de $f(x,y,z) = e^{-xz} + y$ en el punto $P = (1,1,1)$ en la dirección del vector $v = (1,-1,1)$. (Adaptado a partir de Marsden y Tromba, 1991, p. 154).

44. Encuentra una ecuación del plano tangente al elipsoide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 25$ en el punto $(0,2,3)$. (Adaptado a partir de Stewart, 1999, p. 968).

45. Encuentra una ecuación del plano tangente al paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ en el punto $(2,-1,3)$.

Capítulo 4. Derivadas de Orden Superior



Esta unidad inicia con un breve repaso del cálculo de las derivadas ordinarias de orden superior de funciones reales de una variable, para posteriormente enfocar la atención en el cálculo de las derivadas parciales de orden superior de funciones reales de varias variables, a través de ejemplos resueltos. Para el caso particular de las funciones reales de dos variables, se generalizará la teoría correspondiente a valores máximos y mínimos (absolutos y locales), puntos críticos, el Criterio de la Segunda Derivada y problemas de optimización, estudiada en el curso previo de Cálculo de una Variable.

4.1 Ejemplos de derivadas de orden superior, usando las fórmulas de derivación

A continuación, se muestran ejemplos de funciones reales de una variable, esto es, funciones de la forma $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde en primer lugar se calcula su derivada ordinaria de primer orden, la cual se denota por f', $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, siempre que la función está definida por la ecuación $y = f(x)$. Después se deriva la derivada de primer orden para obtener lo que se conoce como la derivada de segundo orden de la función original, que se denota por f'', $\frac{d^2f}{dx^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$. Análogamente, al derivar la derivada de segundo orden se obtiene la derivada de tercer orden de la función original, denotada por f''', $\frac{d^3f}{dx^3}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$. En general, la derivada de orden n de una función real de una variable definida por $y = f(x)$ se obtiene al derivar la derivada de orden $n-1$ y se denota por $f^{(n)}$, $\frac{d^nf}{dx^n}$, $\frac{d^ny}{dx^n}$. De este modo, las derivadas de orden superior de la función f están definidas por:

$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$ (derivada de segundo orden)

$\frac{d^3f}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)$ (derivada de tercer orden)

$\vdots$

$\frac{d^nf}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right)$ (derivada de orden n)

Ejemplos

1. Sea $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 3$, entonces sus derivadas ordinarias de primer orden y de orden superior son las siguientes:

$f'(x) = 6x^2 - 8x + 5$ (derivada de primer orden)

$f''(x) = 12x - 8$ (derivada de segundo orden)

$f'''(x) = 12$ (derivada de tercer orden)

$f^{(iv)}(x) = 0$ (derivada de cuarto orden)

O bien:

$\frac{df}{dx} = 6x^2 - 8x + 5$ (derivada de primer orden)

$\frac{d^2f}{dx^2} = 12x - 8$ (derivada de segundo orden)

$\frac{d^3f}{dx^3} = 12$ (derivada de tercer orden)

$\frac{d^4f}{dx^4} = 0$ (derivada de cuarto orden)

Más aún, la derivada de orden n para $n \geq 4$ está dada por $f^{(n)}(x) = 0$ o $\frac{d^nf}{dx^n} = 0$.

2. Si $g(y) = sen(y - 5)$, entonces sus derivadas de primer orden y de orden superior (hasta quinto orden) son las mostradas a continuación:

$g'(y) = cos(y - 5)$ (derivada de primer orden)

$g''(y) = -sen(y - 5)$ (derivada de segundo orden)

$g'''(y) = -cos(y - 5)$ (derivada de tercer orden)

$g^{(iv)}(y) = sen(y - 5)$ (derivada de cuarto orden)

$g^{(v)}(y) = cos(y - 5)$ (derivada de quinto orden)

O bien:

$\frac{dg}{dy} = cos(y - 5)$ (derivada de primer orden)

$\frac{d^2g}{dy^2} = -sen(y - 5)$ (derivada de segundo orden)

$\frac{d^3g}{dy^3} = -cos(y - 5)$ (derivada de tercer orden)

$\frac{d^4g}{dy^4} = sen(y - 5)$ (derivada de cuarto orden)

$\frac{d^5g}{dy^5} = cos(y - 5)$ (derivada de quinto orden)

3. Si $h(t) = e^{t^2+1}$, entonces sus derivadas de primer orden y de orden superior (hasta cuarto orden) son las siguientes:

$\frac{dh}{dt} = 2te^{t^2+1}$ (derivada de primer orden)

$\frac{d^2h}{dt^2} = 4t^2e^{t^2+1} + 2e^{t^2+1}$ (derivada de segundo orden)

$\frac{d^3h}{dt^3} = 8t^3e^{t^2+1} + 12te^{t^2+1}$ (derivada de tercer orden)

$\frac{d^4h}{dt^4} = 16t^4e^{t^2+1} + 48t^2e^{t^2+1} + 12e^{t^2+1}$ (derivada de cuarto orden)

Nótese que a partir de la derivada de segundo orden de la función h, para su cálculo es necesario utilizar la regla para derivar un producto. El cálculo detallado de la derivada de segundo orden de h se presenta a continuación:

$$\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dh}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left[2te^{t^2+1}\right] = 2t\frac{d}{dt}\left[e^{t^2+1}\right] + e^{t^2+1}\frac{d}{dt}[2t]$$

$$= (2t)\left(2te^{t^2+1}\right) + \left(e^{t^2+1}\right)(2)$$

$$= 4t^2e^{t^2+1} + 2e^{t^2+1}$$

A partir de este momento se analizarán ejemplos de funciones reales de varias variables.

Si f es una función real de dos variables, $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde dichas variables son x y y, sus derivadas parciales de primer orden son funciones que se denotan por $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$. Luego, cada una de estas funciones se derivan nuevamente respecto de las variables x y y, para obtener las cuatro derivadas parciales de segundo orden de f, que se definen de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Donde $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ se obtiene de derivar parcialmente con respecto a x a la derivada parcial de primer orden $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ se obtiene de derivar parcialmente con respecto a y a la derivada parcial de primer orden $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ se obtiene al derivar la función $\frac{\partial f}{\partial x}$ respecto de la variable y y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ se obtiene al derivar la función $\frac{\partial f}{\partial y}$ respecto de la variable x. Además, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ se conocen como derivadas parciales mixtas.

4. Sea $f(x,y) = 5x^2 - 7y^3$. Halla $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Solución:

Las derivadas parciales de primer orden son $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 10x$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -21y^2$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si se considera primero la derivada parcial de f con respecto a la variable x, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 10x$, a partir de ésta se calculan las derivadas parciales de segundo orden $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, como se muestra a continuación.

Derivando parcialmente a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 10x$ con respecto a x:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(10x)$$

$$= 10$$

Derivando parcialmente a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 10x$ con respecto a y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(10x)$$

$$= 0$$

Si se considera ahora la derivada parcial de f con respecto a la variable y, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -21y^2$, de ésta se obtienen las derivadas parciales de segundo orden $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, como se indica a continuación.

Derivando parcialmente a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -21y^2$ con respecto a y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(-21y^2)$$

$$= -42y$$

Derivando parcialmente a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -21y^2$ con respecto a x:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(-21y^2)$$

$$= 0$$

En resumen, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(10x) = 10$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 10x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(10x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-21y^2) = -42y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -21y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-21y^2) = 0$$

5. Sea $f(x,y) = 3x^5y^2 + 2xy^4$. Halla $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Solución:

En este caso, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 15x^4y^2 + 2y^4$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x^5y + 8xy^3$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, son las derivadas parciales de primer orden de la función. Las derivadas parciales de segundo orden $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ se obtienen derivando parcialmente a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 15x^4y^2 + 2y^4$, con respecto a x y con respecto a y, como se muestra a continuación.

Derivando parcialmente a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 15x^4y^2 + 2y^4$ con respecto a x:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(15x^4y^2 + 2y^4)$$

$$= 60x^3y^2$$

Derivando parcialmente a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 15x^4y^2 + 2y^4$ con respecto a y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(15x^4y^2 + 2y^4)$$

$$= 30x^4y + 8y^3$$

De manera semejante, las derivadas parciales de segundo orden $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ se obtienen derivando parcialmente a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x^5y + 8xy^3$ con respecto a y y con respecto a x, procediendo de la siguiente manera.

Derivando parcialmente a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x^5y + 8xy^3$ con respecto a y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(6x^5y + 8xy^3)$$

$$= 6x^5 + 24xy^2$$

Derivando parcialmente a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x^5y + 8xy^3$ con respecto a x:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(6x^5y + 8xy^3)$$

$$= 30x^4y + 8y^3$$

En resumen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 15x^4y^2 + 2y^4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(15x^4y^2 + 2y^4)$$
$$= 60x^3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(15x^4y^2 + 2y^4)$$
$$= 30x^4y + 8y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x^5y + 8xy^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(6x^5y + 8xy^3)$$
$$= 6x^5 + 24xy^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(6x^5y + 8xy^3)$$
$$= 30x^4y + 8y^3$$

6. Sea $f(x,y) = cos(x - 2y)$. Halla $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Solución:

En este caso, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -sen(x - 2y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2sen(x - 2y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Las derivadas parciales de segundo orden se calculan como se indica a continuación.

Derivando parcialmente a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -sen(x - 2y)$ con respecto a x:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\big(-sen(x - 2y)\big)$$

$$= -cos(x - 2y)$$

Derivando parcialmente a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -sen(x - 2y)$ con respecto a y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\big(-sen(x - 2y)\big)$$

$$= 2cos(x - 2y)$$

Derivando parcialmente a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2sen(x-2y)$ con respecto a y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\big(2sen(x-2y)\big)$$

$$= -4cos(x-2y)$$

Derivando parcialmente a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2sen(x-2y)$ con respecto a x:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\big(2sen(x-2y)\big)$$

$$= 2cos(x-2y)$$

De manera resumida, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -sen(x-2y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\big(-sen(x-2y)\big) = -cos(x-2y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\big(-sen(x-2y)\big) = 2cos(x-2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2sen(x-2y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\big(2sen(x-2y)\big) = -4cos(x-2y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\big(2sen(x-2y)\big) = 2cos(x-2y)$$

7. Sea $f(x,y) = sen(xy)$. Halla $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

Solución:

Las derivadas parciales de primer orden de f son $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ycos(xy)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xcos(xy)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Luego:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\big(ycos(xy)\big)$$
$$= -y^2 sen(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ycos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\big(ycos(xy)\big)$$
$$= -xysen(xy) + cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\big(xcos(xy)\big)$$
$$= -x^2 sen(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xcos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\big(xcos(xy)\big)$$
$$= -xysen(xy) + cos(xy)$$

8. Sea $f(x,y) = sen^2 xcosy$. Halla $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Solución:

Las derivadas parciales de primer orden de f son $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2senxcosxcosy = sen(2x)cosy$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -sen^2 xseny$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, donde en la derivada parcial de f con respecto a la variable x se está haciendo uso de la identidad trigonométrica $sen(2u) = 2senucosu$, con la finalidad de facilitar el cálculo de las derivadas parciales de segundo orden que se obtienen a partir de ésta.

Luego:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(sen(2x)cosy)$$
$$= 2cos(2x)cosy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2senxcosxcosy$$
$$= sen(2x)cosy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(sen(2x)cosy)$$
$$= -sen(2x)seny$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-sen^2 xseny)$$
$$= -sen^2 xcosy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -sen^2 xseny$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-sen^2 xseny)$$
$$= -2senxcosxseny$$
$$= -sen(2x)seny$$

Donde en el cálculo de la derivada parcial de segundo orden $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ nuevamente se ocupó la identidad $sen(2u) = 2senucosu$.

Nótese que en los ejemplos 4, 5, 6, 7 y 8, las derivadas parciales mixtas son iguales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Consideremos ahora que f es una función real de tres variables, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, donde dichas variables son x, y y z, entonces sus derivadas parciales de primer orden son funciones que se denotan por $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial f}{\partial z}$. Luego, cada una de estas funciones se derivan nuevamente respecto de las variables x, y y z, para obtener las derivadas parciales de segundo y tercer orden de f, algunas de las cuales se definen de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right), \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)$$

9. Sea $f(x,y,z) = e^{xy} - xlnz$. Halla $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$ y $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$. (Adaptado a partir de Larson *et. al.*, 1996, p. 1131).

Solución:

Las derivadas parciales de primer orden de f son $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = ye^{xy} - lnz$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xe^{xy}$ y $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{x}{z}$, para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $z > 0$. Luego, se calculan las derivadas parciales de segundo orden, como se indica a continuación.

Derivando parcialmente a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = ye^{xy} - lnz$ con respecto a y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy} - lnz)$$

$$= xye^{xy} + e^{xy}$$

Derivando parcialmente a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = ye^{xy} - lnz$ con respecto a z:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}(ye^{xy} - lnz)$$

$$= -\frac{1}{z}$$

Derivando parcialmente a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xe^{xy}$ con respecto a x:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy})$$

$$= xye^{xy} + e^{xy}$$

Derivando parcialmente a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xe^{xy}$ con respecto a z:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}(xe^{xy})$$

$$= 0$$

Derivando parcialmente a $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{x}{z}$ con respecto a x:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{z}\right)$$

$$= -\frac{1}{z}$$

Derivando parcialmente a $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{x}{z}$ con respecto a y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{z}\right)$$

$$= 0$$

Posteriormente, para calcular las derivadas parciales de tercer orden, se procede como se muestra a continuación.

Derivando parcialmente a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = xye^{xy} + e^{xy}$ con respecto a z:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial z}(xye^{xy} + e^{xy}) = 0$$

Derivando parcialmente a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 0$ con respecto a x:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(0) = 0$$

En resumen, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy} - lnz)$$
$$= xye^{xy} + e^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = ye^{xy} - lnz$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial z}(ye^{xy} - lnz)$$
$$= -\frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xe^{xy} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}) = xye^{xy} + e^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xe^{xy} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial z}(xe^{xy}) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{x}{z} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{z}\right) = -\frac{1}{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{x}{z} \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{z}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = xye^{xy} + e^{xy} \longrightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z)\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 0 \longrightarrow \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z)\right) = 0$$

Nótese que, en el ejemplo 9, las derivas parciales mixtas que dependen de las mismas variables son iguales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$$

En general, una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cuyas derivadas parciales de orden n son continuas satisface el hecho de que sus derivadas parciales mixtas que dependen de las mismas variables son iguales. Dichas funciones reciben el nombre de *funciones de clase* C^n y en esta unidad se centrará la atención en este tipo de funciones.

4.2 Máximos y mínimos

Una vez que se ha revisado cómo llevar a cabo el cálculo de las derivadas parciales de orden superior de una función real de varias variables, se está en condiciones de establecer la teoría de máximos y mínimos para las funciones reales de dos variables, enfatizando en el Criterio de la Segunda Derivada y su aplicación.

4.2.1 Definición de máximo absoluto y máximo local

Sean $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función cualquiera y $(a,b) \in Domf$.

(a) Si $f(x,y) \leq f(a,b)$ para todo $(x,y) \in Domf$, entonces f tiene un máximo absoluto en (a,b) y su valor es $f(a,b)$.

(b) Si $f(x,y) \leq f(a,b)$ para todo (x,y) en alguna vecindad del punto (a,b), entonces f tiene un máximo local en (a,b) y su valor es $f(a,b)$.

En palabras más simples: El máximo absoluto de una función es el valor más grande que puede tomar la función dentro de todo su dominio; mientras que, un máximo local de una función es el valor más grande que puede tomar la función dentro de un subconjunto de su dominio que contiene al punto donde se alcanza dicho máximo local.

4.2.2 Definición de mínimo absoluto y mínimo local

Sean $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función cualquiera y $(a, b) \in Domf$.

(a) Si $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in Domf$, entonces f tiene un mínimo absoluto en (a, b) y su valor es $f(a, b)$.

(b) Si $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todo (x, y) en alguna vecindad del punto (a, b), entonces f tiene un mínimo local en (a, b) y su valor es $f(a, b)$.

En palabras más simples: El mínimo absoluto de una función es el valor más pequeño que puede tomar la función dentro de todo su dominio; mientras que, un mínimo local de una función es el valor más pequeño que puede tomar la función dentro de un subconjunto de su dominio que contiene al punto donde se alcanza dicho mínimo local.

Nota

Se dice que f tiene un *extremo* (absoluto o local) en (a, b) si f alcanza un máximo o un mínimo (absoluto o local) en (a, b).

4.2.3 Definición de punto crítico

Sean $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función cualquiera y $(a, b) \in Domf$. Se dice que (a, b) es un punto crítico de f si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$.

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ o $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ no existe.

En esta definición es un requisito indispensable que $(a, b) \in Domf$; por lo cual, en el cálculo de los puntos críticos de una función se sugiere establecer primero su dominio.

Teorema: Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $(a, b) \in Domf$. Si f tiene un extremo local en (a, b), entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$.

Es decir, (a, b) es un punto crítico de f. De este modo, en la práctica, los extremos de f se buscan en sus puntos críticos.

4.2.4 Ejemplos sobre máximos y mínimos absolutos de funciones $f: \mathbb{R}2 \to \mathbb{R}$

Para cada una de las siguientes funciones realiza lo que se pide a continuación.

(a) Encuentra sus puntos críticos.

(b) Determina si en los puntos críticos encontrados en (a) la función alcanza un máximo o un mínimo absoluto.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$

2. $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

3. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 8$

4. $f(x, y) = y^2 - x^2$
(Adaptado a partir de Leithold, 1998, p. 991, y de Stewart, 1999, p. 974).

Solución:

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$

(a) Primero se buscan los puntos críticos de f, para lo que se propone $(a,b) \in Domf$ cualquiera, donde $Domf = \mathbb{R}^2$. Si (a,b) es un punto crítico de f, entonces se cumple alguna de las siguientes condiciones:

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ o $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ no existe.

Sin embargo, la segunda condición queda descartada debido a que las dos derivadas parciales de primer orden de f existen en cualquier punto de su dominio, es decir, $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ existen para todo $(a,b) \in Domf$; puesto que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. De este modo, se restringe la búsqueda de los puntos críticos a aquellos que satisfacen la primera condición, de aquí que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \Longrightarrow 2a = 0 \Longrightarrow a = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \Longrightarrow 2b = 0 \Longrightarrow b = 0$$

Por lo tanto, $(a,b) = (0,0)$ es el único punto en el dominio de f tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$, esto es, $(a,b) = (0,0)$ es el único punto crítico de f.

(b) Ahora se procede a determinar si f alcanza un máximo o un mínimo absoluto en su único punto crítico $(a,b) = (0,0)$, para lo que se requiere establecer cuál de las siguientes condiciones es la que se cumple:

(i) $f(x,y) \leq f(a,b)$ para todo $(x,y) \in Domf$, si $f(a,b)$ es un máximo absoluto.

(ii) $f(a,b) \leq f(x,y)$ para todo $(x,y) \in Domf$, si $f(a,b)$ es un mínimo absoluto.

Donde, en este caso, $f(a,b) = f(0,0) = (0)^2 + (0)^2 = 0$, que se obtiene de evaluar la función en su punto crítico $(a,b) = (0,0)$.

Como se tiene que

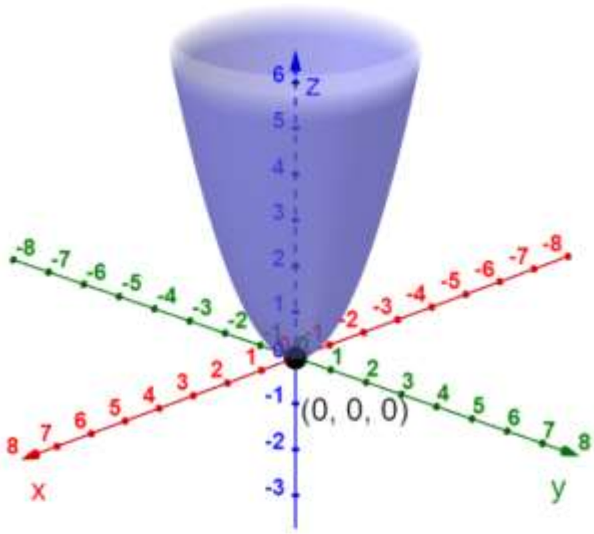
$0 \leq x^2 + y^2$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow f(0,0) \leq f(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow f(a,b) \leq f(x,y)$ para todo $(x,y) \in Domf$

Se concluye que f alcanza un mínimo absoluto en su único punto crítico $(0,0)$ y el valor del mínimo absoluto es $f(0,0) = 0$. Ver la gráfica en la figura 4.1.

Figura 4.1 El punto mínimo absoluto de $f(x,y) = x^2 + y^2$ es el $(0,0,0)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

2. $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

(a) Se buscan los puntos críticos de f, para lo que se sugiere establecer primero el dominio de la función, que es $Domf = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 16 - x^2 - y^2 \geq 0\}$. Si $(a,b) \in Domf$ es un punto crítico de f, entonces se satisface alguna de las siguientes condiciones:

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ o $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ no existe.

Donde $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $16 - x^2 - y^2 > 0$. Si (a,b) satisface la condición (i), entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \Longrightarrow -\frac{a}{\sqrt{16-a^2-b^2}} = 0 \Longrightarrow a = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \Longrightarrow -\frac{b}{\sqrt{16-a^2-b^2}} = 0 \Longrightarrow b = 0$$

donde $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ debe ser tal que $16 - a^2 - b^2 > 0$ para que ambas derivadas parciales de primer orden estén definidas. De aquí que, $(a,b) = (0,0)$ es el único punto crítico de f tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$. En efecto, al evaluar las derivadas parciales en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -\frac{0}{\sqrt{16-0^2-0^2}} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -\frac{0}{\sqrt{16-0^2-0^2}} = \frac{0}{2} = 0$$

Por otro lado, (a,b) satisface la condición (ii) si y sólo si es tal que $16 - a^2 - b^2 = 0$, puesto que: $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = -\frac{a}{\sqrt{16-a^2-b^2}}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = -\frac{b}{\sqrt{16-a^2-b^2}}$ no existen (se indefinen) en aquellos $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tales que $16 - a^2 - b^2 = 0$.

Por ejemplo, evaluando las dos derivadas parciales de primer orden en $(a,b)=(0,4)$ se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,4)=-\frac{0}{\sqrt{16-(0)^2-(4)^2}}=-\frac{0}{\sqrt{16-16}}=\frac{0}{0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,4)=-\frac{4}{\sqrt{16-(0)^2-(4)^2}}=-\frac{4}{\sqrt{16-16}}=\frac{4}{0}$$

no existen; lo mismo ocurre en otros puntos como $(0,-4),(4,0),(-4,0),(\sqrt{8},\sqrt{8})$, etc. Gráficamente, este tipo de puntos críticos se encuentran ubicados en el plano xy sobre la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=16$ (ver la figura 4.2).

Además, se descartan los puntos $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tales que $16-a^2-b^2<0$, como posibles puntos críticos, debido a que indefinen no sólo a las derivadas parciales de primer orden sino a la función misma, esto es, no son elementos del dominio de la función; por ejemplo, $(0,-5),(4.5,0),(-7,0),(3.5,4),(3,-4.6),(8,8)$.

En resumen, los puntos críticos de f son $(0,0)$ y los pares ordenados de la forma $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tales que $16-a^2-b^2=0$.

(b) Para determinar si f alcanza un máximo o un mínimo absoluto en cada uno de sus puntos críticos $(a,b)=(0,0)$ y $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tal que $16-a^2-b^2=0$, se requiere establecer cuál de las siguientes condiciones es la que se cumple:

(i) $f(x,y)\leq f(a,b)$ para todo $(x,y)\in Domf$, si $f(a,b)$ es un máximo absoluto.

(ii) $f(a,b)\leq f(x,y)$ para todo $(x,y)\in Domf$, si $f(a,b)$ es un mínimo absoluto.

Donde, $f(0,0)=\sqrt{16-0^2-0^2}=4$ y $f(a,b)=\sqrt{16-a^2-b^2}=0$ para $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tal que $16-a^2-b^2=0$. Luego, si se considera el primer punto crítico $(a,b)=(0,0)$, se tiene que:

$\sqrt{16-x^2-y^2}\leq 4$ para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $16-x^2-y^2\geq 0$

$\Rightarrow f(x,y)\leq f(0,0)$ para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $16-x^2-y^2\geq 0$

$\Rightarrow f(x,y)\leq f(a,b)$ para todo $(x,y)\in Domf$

Es decir, f alcanza un máximo absoluto en $(0,0)$ y su valor es $f(0,0)=4$.

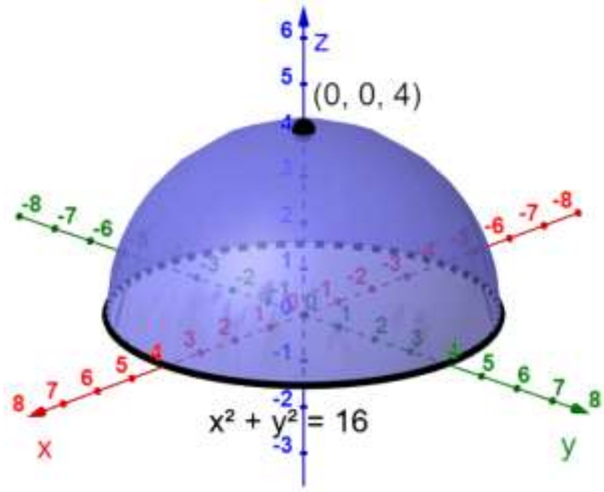
Si se considera ahora cualquier punto crítico $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tal que $16-a^2-b^2=0$, entonces:

$0\leq\sqrt{16-x^2-y^2}$, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $16-x^2-y^2\geq 0$

$\Rightarrow f(a,b)\leq f(x,y)$ para todo $(x,y)\in Domf$

Esto es, f alcanza un mínimo absoluto en cada punto $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ que satisface $16-a^2-b^2=0$ y el valor del mínimo absoluto es $f(a,b)=0$. Ver la gráfica en la figura 4.2.

Figura 4.2 El punto máximo absoluto de $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ es el $(0,0,4)$ y los mínimos absolutos son los puntos sobre la circunferencia de ecuación
$x^2 + y^2 = 16$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

3. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 8$

(a) Se buscan los puntos críticos de f, para lo que se sugiere establecer primero el dominio de la función, que es $Domf = \mathbb{R}^2$. Si $(a, b) \in Domf$ es un punto crítico de f, entonces se cumple alguna de las siguientes condiciones:

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$.

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ o $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ no existe.

Donde $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 4$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; es decir, ambas derivadas parciales de primer orden están bien definidas en todo el dominio de la función. En consecuencia, no existen puntos críticos que satisfagan la condición (ii) y la búsqueda de los puntos críticos se restringe a aquellos que satisfacen la condición (i); esto es:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \Longrightarrow 2a + 2 = 0 \Longrightarrow a = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0 \Longrightarrow 2b - 4 = 0 \Longrightarrow b = 2$$

Por lo tanto, $(a, b) = (-1,2)$ es el único punto en el dominio de f tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$; de hecho, $(a, b) = (-1,2)$ es el único punto crítico de f.

(b) Para determinar si f alcanza un máximo o un mínimo absoluto en su único punto crítico $(a, b) = (-1,2)$, se requiere establecer cuál de las siguientes condiciones es la que se cumple:

(i) $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todo $(x, y) \in Domf$, si $f(a, b)$ es un máximo absoluto.

(ii) $f(a, b) \leq f(x, y)$ para todo $(x, y) \in Domf$, si $f(a, b)$ es un mínimo absoluto.

Donde $f(a, b) = f(-1,2) = (-1)^2 + (2)^2 + 2(-1) - 4(2) + 8 = 3$, que se obtiene de evaluar la función en su punto crítico $(a, b) = (-1,2)$. Además, se requiere expresar de una forma más conveniente a la función f para poder compararla con el valor obtenido $f(-1,2) = 3$ y, de este modo, determinar si dicho valor es el más grande o el más pequeño que toma f en todo su dominio; para esto, se procede a completar cuadrados, tal como se muestra a continuación:

$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 8$

$= (x^2 + 2x) + (y^2 - 4y) + 8$

$= (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + 8 - 1 - 4$

$= (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + 3$

Es decir, $f(x,y) = (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + 3$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Como se tiene que

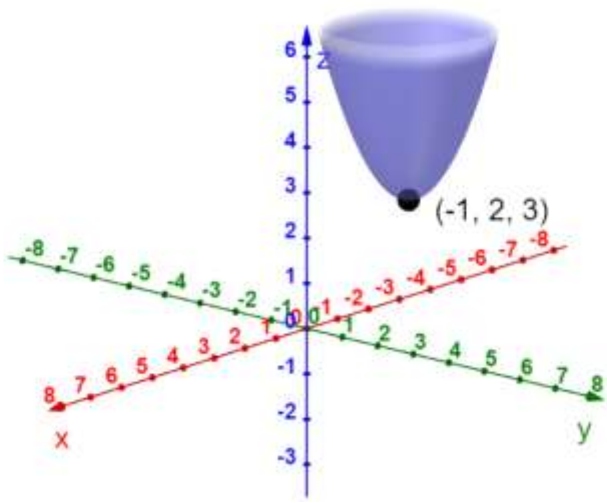
$3 \leq (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + 3$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow f(-1,2) \leq f(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow f(a,b) \leq f(x,y)$ para todo $(x,y) \in Domf$

Se concluye que f alcanza un mínimo absoluto en su único punto crítico $(-1,2)$ y el valor del mínimo absoluto es $f(-1,2) = 3$. Ver la gráfica en la figura 4.3.

Figura 4.3 El punto mínimo absoluto de $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 8$ es el $(-1,2,3)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

4. $f(x,y) = y^2 - x^2$

(a) Se buscan los puntos críticos de f, para lo que se sugiere establecer primero el dominio de la función que, nuevamente, es $Domf = \mathbb{R}^2$. Si $(a,b) \in Domf$ es un punto crítico de f, entonces satisface alguna de las siguientes condiciones:

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ o $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ no existe.

Donde $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; es decir, ambas derivadas parciales de primer orden están bien definidas en todo el dominio de la función. En consecuencia, no existen puntos críticos que satisfagan la segunda condición y la búsqueda de los puntos críticos se restringe a aquellos que satisfacen únicamente la primera; esto es:

$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \Longrightarrow -2a = 0 \Longrightarrow a = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \Longrightarrow 2b = 0 \Longrightarrow b = 0$

Por lo tanto, $(a,b) = (0,0)$ es el único punto en el dominio de f tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$; esto es, $(a,b) = (0,0)$ es el único punto crítico de f.

(b) Ahora se procede a determinar si f alcanza un máximo o un mínimo absoluto en su único punto crítico $(a,b) = (0,0)$, para lo que se requiere establecer cuál de las siguientes condiciones es la que se cumple:

(i) $f(x,y) \leq f(a,b)$ para todo $(x,y) \in Domf$, si $f(a,b)$ es un máximo absoluto.

(ii) $f(a,b) \leq f(x,y)$ para todo $(x,y) \in Domf$, si $f(a,b)$ es un mínimo absoluto.

Donde $f(a,b) = f(0,0) = (0)^2 - (0)^2 = 0$, que se obtiene de evaluar la función $f(x,y) = y^2 - x^2$ en su único punto crítico $(a,b) = (0,0)$.

Como se tiene que

$0 \leq y^2$ para todo $(0,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow f(0,0) \leq f(0,y)$ para todo $(0,y) \in \mathbb{R}^2$

Es decir, existen elementos del dominio de f, que son los puntos de la forma $(0,y)$, en los que los valores de la función $f(0,y)$ son mayores que $f(0,0) = 0$. Por ejemplo, para $y = 2$ se tiene que $0 \leq 4 = y^2$.

Pero también se tiene que

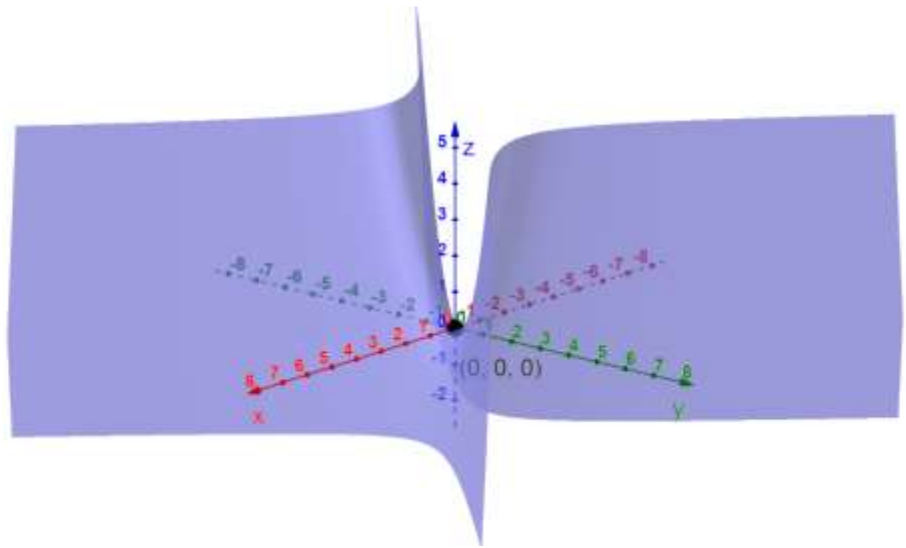
$-x^2 \leq 0$ para todo $(x,0) \in \mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow f(x,0) \leq f(0,0)$ para todo $(x,0) \in \mathbb{R}^2$

Es decir, existen elementos del dominio de f, que son los puntos de la forma $(x,0)$, en los que los valores de la función $f(x,0)$ son menores que $f(0,0) = 0$. Por ejemplo, para $x = 1$ se tiene que $-x^2 = -1 \leq 0$.

Se concluye que f no alcanza ni un máximo ni un mínimo absoluto en su único punto crítico $(0,0)$; o bien, que el valor $f(0,0) = 0$ no es ni máximo ni mínimo. En la siguiente sección se verá que a este tipo de puntos críticos se les conoce como *puntos silla*. Ver la figura 4.4.

Figura 4.4 Para la función $f(x, y) = y^2 - x^2$, el punto $(0,0,0)$ no es ni máximo ni mínimo absoluto



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

A continuación, se enunciará el criterio que permite determinar los máximos y mínimos locales de una función real en dos variables, que es el Criterio de la Segunda Derivada.

4.2.5 Criterio de la segunda derivada

Sean $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función cuyas derivadas parciales de primer y segundo orden son continuas (es decir, f es de clase C^2) y $(a, b) \in Domf$ tales que $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$. Si se define $\mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\right)^2$ entonces se tiene lo siguiente:

(i) f tiene un máximo local en (a, b) si $\mathcal{D} > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$.

(ii) f tiene un mínimo local en (a, b) si $\mathcal{D} > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$.

(iii) f no tiene ni máximo ni mínimo en (a, b) si $\mathcal{D} < 0$. Además, se dice que (a, b) es un *punto silla* de f; es decir, (a, b) es un punto crítico de f tal que $f(a, b)$ no es un extremo de f.

(iv) El criterio falla si $\mathcal{D} = 0$. En este caso, se utiliza de manera directa la definición de máximo o mínimo absoluto.

Nota

Si en los incisos (i) y (ii) del Criterio de la Segunda Derivada se reemplaza $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$ por $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$, las conclusiones en dichos incisos no se ven afectadas. Esto es:

(i) f tiene un máximo local en (a, b) si $\mathcal{D} > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) < 0$.

(ii) f tiene un mínimo local en (a, b) si $\mathcal{D} > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) > 0$.

Además, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$ debido a que la función f es de clase C^2.

4.2.6 Ejemplos sobre máximos y mínimos locales de funciones $f\colon \mathbb{R}2 \to \mathbb{R}$, usando el criterio de la segunda derivada

Para cada una de las siguientes funciones realiza lo que se pide a continuación.

(a) Encuentra sus puntos críticos.

(b) Determina si en los puntos críticos encontrados en (a) la función alcanza un máximo o un mínimo local o se trata de un punto silla, utilizando el Criterio de la Segunda Derivada.

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$

2. $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$

3. $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$

4. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

5. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$

6. $f(x,y) = xseny$

(Adaptado a partir de Leithold, 1998, p. 994, de Marsden y Tromba, 1991, p. 262, y de Stewart, 1999, p. 975).

Solución:

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$

(a) Se buscan los puntos críticos de f, para lo cual se establece primero su dominio que, en este caso, es $Domf = \mathbb{R}^2$. Si $(a,b) \in Domf$ es un punto crítico de f, entonces satisface alguna de las siguientes condiciones:

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ o $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ no existe.

Donde $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - x$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; es decir, ambas derivadas parciales de primer orden están bien definidas en todo el dominio de la función. De este modo, no existen puntos críticos que satisfagan la condición (ii) y la búsqueda de los puntos críticos se restringe a aquellos que satisfacen únicamente la condición (i); esto es:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \Longrightarrow 2a - b = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \Longrightarrow 2b - a = 0$$

Es decir, se llega a un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, a y b, que se puede resolver por alguno de los métodos básicos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, que son: suma y resta o eliminación, sustitución e igualación. En efecto, acomodando y “etiquetando” las ecuaciones del sistema anterior, se tiene que:

$$2a - b = 0 \cdots (1)$$

$$-a + 2b = 0 \cdots (2)$$

Multiplicando por 2 la ecuación (1) y sumando la ecuación (2), se llega a lo siguiente:

$4a - 2b = 0$

$\underline{-a + 2b = 0}$

$3a + 0b = 0$

$3a = 0$

De donde $a = 0$. Sustituyendo el valor de $a = 0$ en cualquiera de las ecuaciones originales, resulta también que $b = 0$; esto es, $(a, b) = (0,0)$ es la única solución del sistema. Por lo tanto, $(a, b) = (0,0)$ es el único punto crítico de f.

(b) Se procede ahora a determinar si f alcanza un máximo o un mínimo local en su único punto crítico $(a, b) = (0,0)$, usando el Criterio de la Segunda Derivada. Calculando las derivadas parciales de segundo orden de f, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -1$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

En particular:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -1$$

Luego:

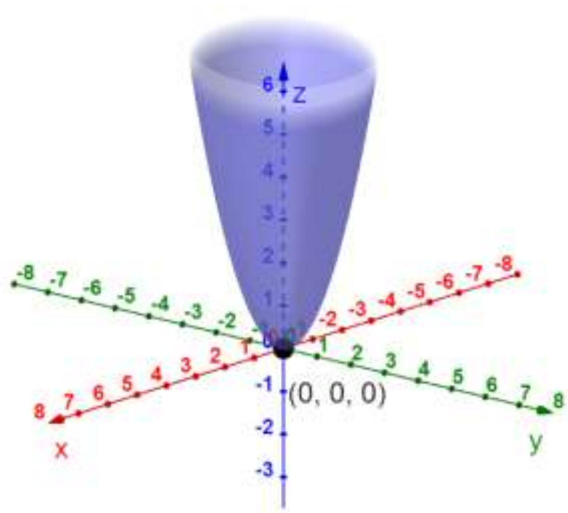
$$\mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\right)^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\right)^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{D} = (2)(2) - (-1)^2 = 4 - 1 = 3$$

Como $\mathcal{D} = 3 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0$ entonces, por el Criterio de la Segunda Derivada, f alcanza un mínimo local en su único punto crítico $(0,0)$ y el valor del mínimo local es $f(0,0) = 0$. Ver la gráfica en la figura 4.5.

Figura 4.5 La función $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ alcanza un mínimo local en $(0,0)$ y vale 0



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

2. $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$

(a) Se buscan los puntos críticos de f dentro de su dominio que, de nuevo, es $Domf = \mathbb{R}^2$. Si $(a,b) \in Domf$ es un punto crítico de f, entonces se cumple alguna de las siguientes condiciones:

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ o $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ no existe.

Donde $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y + x$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; es decir, ambas derivadas parciales de primer orden están bien definidas en todo el dominio de la función. En consecuencia, la búsqueda de los puntos críticos se restringe a aquellos que satisfacen únicamente la primera condición; esto es:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \Longrightarrow 2a + b = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \Longrightarrow -2b + a = 0$$

Es decir, nuevamente se llega a un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, a y b, que se puede resolver por alguno de los métodos básicos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. En efecto, acomodando y "etiquetando" las ecuaciones del sistema anterior, se tiene que:

$$2a + b = 0 \cdots (1)$$

$$a - 2b = 0 \cdots (2)$$

Multiplicando la ecuación (1) por 2 y sumando la ecuación (2), se llega a lo siguiente:

$$4a + 2b = 0$$

$$\underline{\quad a - 2b = 0}$$

$$5a + 0b \ = \ 0$$

$$5a = 0$$

De donde $a = 0$. Sustituyendo el valor de $a = 0$ en cualquiera de las ecuaciones originales, resulta también que $b = 0$; esto es, $(a,b) = (0,0)$ es la única solución del sistema. Por lo tanto, $(a,b) = (0,0)$ es el único punto crítico de f.

(b) Se procede ahora a determinar si f alcanza un máximo o un mínimo local en su único punto crítico $(a,b) = (0,0)$, usando el Criterio de la Segunda Derivada. Calculando las derivadas parciales de segundo orden de f, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

En particular:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$$

Luego:

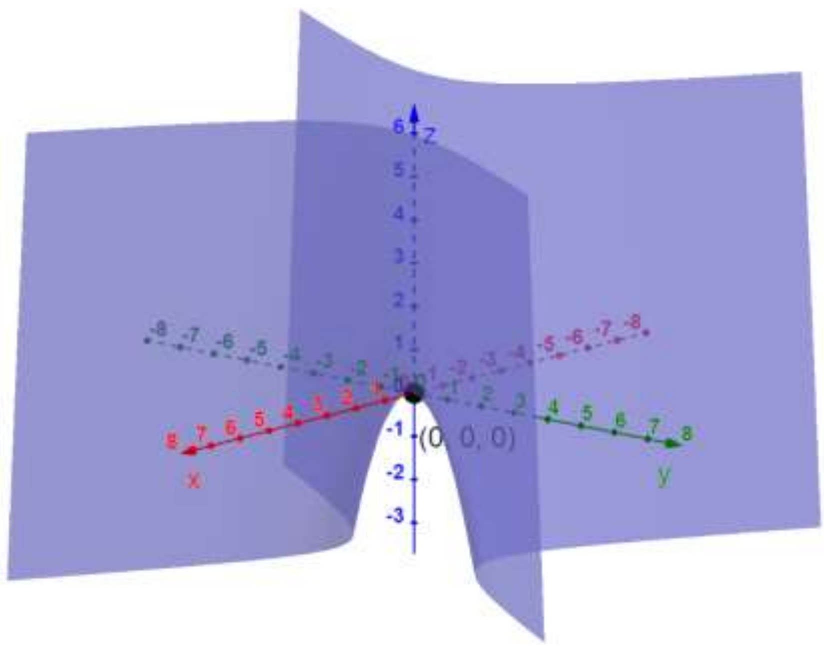
$$\mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2$$

$$\Longrightarrow \mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\right)^2$$

$$\Longrightarrow \mathcal{D} = (2)(-2) - (1)^2 = -4 - 1 = -5$$

Como $\mathcal{D} = -5 < 0$ entonces, por el Criterio de la Segunda Derivada, f no alcanza ni un máximo ni un mínimo en su único punto crítico $(0,0)$; es decir, $(0,0)$ es un punto silla de f. Ver la gráfica en la figura 4.6.

Figura 4.6 La función $f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$ no alcanza ni máximo ni mínimo local en $(0,0)$, sino que es un punto silla



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

3. $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$

(a) Se buscan los puntos críticos de f dentro de su dominio, considerando que nuevamente es $Domf = \mathbb{R}^2$. Si $(a,b) \in Domf$ es un punto crítico de f, entonces satisface alguna de las siguientes condiciones:

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ o $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ no existe.

Donde $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 8x^3 - 2x$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 2$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; es decir, ambas derivadas parciales de primer orden están bien definidas en todo el dominio de la función. En consecuencia, no existen puntos críticos que satisfagan la segunda condición y la búsqueda de los puntos críticos se restringe a aquellos que satisfacen únicamente la primera; esto es:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \Longrightarrow 8a^3 - 2a = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \Longrightarrow 2b - 2 = 0$

Resolviendo cada una de las ecuaciones anteriores, por factorización, se obtiene lo siguiente:

$8a^3 - 2a = 0 \Longrightarrow 2a(4a^2 - 1) = 0$

$\Longrightarrow 2a(2a - 1)(2a + 1) = 0$

$\Longrightarrow 2a = 0,\ 2a - 1 = 0,\ 2a + 1 = 0$

$\Longrightarrow a = 0,\ a = \frac{1}{2},\ a = -\frac{1}{2}$

$2b - 2 = 0 \Longrightarrow 2(b - 1) = 0$

$\Longrightarrow b - 1 = 0$

$\Longrightarrow b = 1$

Por lo tanto, $(0,1)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ son los puntos críticos de f.

(b) Se procede ahora a determinar si f alcanza un máximo o un mínimo local en cada uno de los puntos críticos encontrados en (a), usando el Criterio de la Segunda Derivada. Calculando las derivadas parciales de segundo orden de f, se tiene que:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 24x^2 - 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

En particular, para el primer punto crítico $(a,b) = (0,1)$:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = 24(0)^2 - 2 = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) = 0$

Luego:

$\mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2$

$\Longrightarrow \mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1)\right)^2$

$\Longrightarrow \mathcal{D} = (-2)(2) - (0)^2 = -4$

Como $\mathcal{D} = -4 < 0$ entonces, por el Criterio de la Segunda Derivada, f no alcanza ni un máximo ni un mínimo en el punto crítico $(0,1)$; es decir, $(0,1)$ es un punto silla de f.

Para el segundo punto crítico $(a,b) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 24\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 0$

Luego:

$\mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2$

$$\Longrightarrow \mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2},1\right)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{2},1\right)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(\frac{1}{2},1\right)\right)^2$$

$$\Longrightarrow \mathcal{D} = (4)(2) - (0)^2 = 8$$

Como $\mathcal{D} = 8 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2},1\right) = 4 > 0$ entonces, por el Criterio de la Segunda Derivada, f alcanza un mínimo local en el punto crítico $\left(\frac{1}{2},1\right)$ y su valor es $f\left(\frac{1}{2},1\right) = -\frac{9}{8}$.

Para el tercer punto crítico $(a,b) = \left(-\frac{1}{2},1\right)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2},1\right) = 24\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\frac{1}{2},1\right) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(-\frac{1}{2},1\right) = 0$$

Luego:

$$\mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2$$

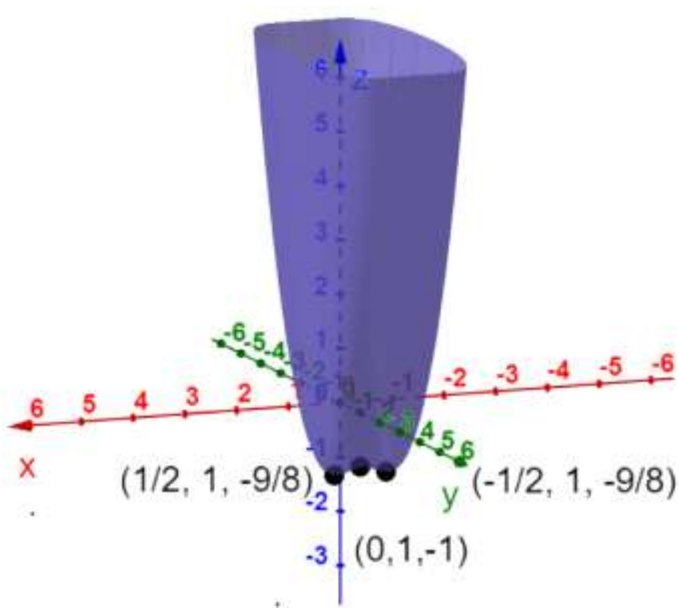
$$\Longrightarrow \mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2},1\right)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\frac{1}{2},1\right)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(-\frac{1}{2},1\right)\right)^2$$

$$\Longrightarrow \mathcal{D} = (4)(2) - (0)^2 = 8$$

Como $\mathcal{D} = 8 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2},1\right) = 4 > 0$ entonces, por el Criterio de la Segunda Derivada, f alcanza un mínimo local en el punto crítico $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ y el valor del mínimo local es $f\left(-\frac{1}{2},1\right) = -\frac{9}{8}$.

En resumen, la función $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$ alcanza un mínimo local en dos de sus puntos críticos, $\left(\frac{1}{2},1\right)$ y $\left(-\frac{1}{2},1\right)$, y el valor del mínimo en ambos puntos es de $-\frac{9}{8}$; mientras que, el punto crítico $(0,1)$ es un punto silla de f. Ver la figura 4.7.

Figura 4.7 La función $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$ tiene dos puntos mínimos locales, $\left(\frac{1}{2},1,-\frac{9}{8}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2},1,-\frac{9}{8}\right)$, y un punto silla $(0,1,-1)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

4. $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4 - 1$

(a) Si $(a,b) \in Domf$ es un punto crítico de f, con $Domf = \mathbb{R}^2$, entonces se cumple alguna de las siguientes condiciones:

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ o $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ no existe.

Donde $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4y - 4x^3$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x - 4y^3$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, son las derivadas parciales de primer orden y están bien definidas en todo el dominio de la función. En consecuencia, la búsqueda de los puntos críticos se restringe a aquellos que satisfacen sólo la primera condición; esto es:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \Longrightarrow 4b - 4a^3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \Longrightarrow 4a - 4b^3 = 0$$

Despejando b de la primera ecuación se obtiene $b = a^3$. Sustituyendo el valor de $b = a^3$ en la segunda ecuación y factorizando resulta lo siguiente:

$$4a - 4b^3 = 0 \;\Longrightarrow\; 4a - 4(a^3)^3 = 0$$

$$\Longrightarrow 4a - 4a^9 = 0$$

$$\Longrightarrow -(4a^9 - 4a) = 0$$

$$\Longrightarrow -4a(a^8 - 1) = 0$$

$$\Longrightarrow -4a(a^4 - 1)(a^4 + 1) = 0$$

$$\Longrightarrow -4a(a^2 - 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1) = 0$$

$$\Longrightarrow -4a(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1) = 0$$

$$\Longrightarrow -4a = 0,\; a - 1 = 0,\; a + 1 = 0$$

$$\Longrightarrow a = 0,\; a = 1,\; a = -1$$

Como $b = a^3$, entonces para $a = 0$, $b = 0$; para $a = 1$, $b = 1$; para $a = -1$, $b = -1$. Por lo tanto,$(0,0)$, $(1,1)$ y $(-1,-1)$ son los puntos críticos de f.

(b) Se procede ahora a determinar si f alcanza un máximo o un mínimo local en cada uno de los puntos críticos encontrados en (a), usando el Criterio de la Segunda Derivada. Calculando las derivadas parciales de segundo orden de f, se tiene que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -12x^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -12y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

En particular, para el primer punto crítico $(a,b) = (0,0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -12(0)^2 = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -12(0)^2 = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 4$$

Luego:

$$\mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2$$

$$\Longrightarrow \mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\right)^2$$

$$\Longrightarrow \mathcal{D} = (0)(0) - (4)^2 = -16$$

Como $\mathcal{D} = -16 < 0$ entonces, por el Criterio de la Segunda Derivada, f no alcanza ni un máximo ni un mínimo en el punto crítico $(0,0)$; es decir, $(0,0)$ es un punto silla de f.

Para el segundo punto crítico $(a,b) = (1,1)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -12(1)^2 = -12 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = -12(1)^2 = -12 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 4$$

Luego:

$$\mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2$$

$$\Longrightarrow \mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)\right)^2$$

$$\Longrightarrow \mathcal{D} = (-12)(-12) - (4)^2 = 144 - 16 = 128$$

Como $\mathcal{D} = 128 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = -12 < 0$ entonces, por el Criterio de la Segunda Derivada, f alcanza un máximo local en el punto crítico $(1,1)$ y el valor del máximo local es $f(1,1) = 1$.

Para el tercer punto crítico $(a,b) = (-1,-1)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = -12(-1)^2 = -12 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,-1) = -12(-1)^2 = -12 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,-1) = 4$$

Luego:

$$\mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2$$

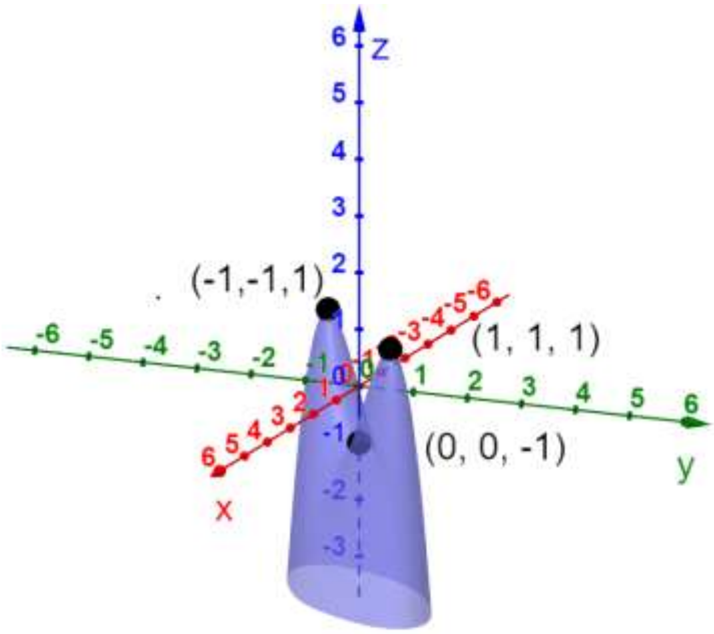
$$\Longrightarrow \mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,-1)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,-1)\right)^2$$

$$\Longrightarrow \mathcal{D} = (-12)(-12) - (4)^2 = 144 - 16 = 128$$

Como $\mathcal{D} = 128 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = -12 < 0$ entonces, por el Criterio de la Segunda Derivada, f alcanza un máximo local en el punto crítico $(-1,-1)$ y el valor del máximo local es $f(-1,-1) = 1$.

En resumen, la función $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4 - 1$ alcanza un máximo local en dos de sus puntos críticos, $(1,1)$ y $(-1,-1)$, y el valor del máximo en ambos puntos es de 1; mientras que, el punto crítico $(0,0)$ es un punto silla de f. Ver la gráfica en la figura 4.8.

Figura 4.8 La función $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4 - 1$ tiene dos puntos máximos locales, $(1,1,1)$ y $(-1,-1,1)$, y un punto silla $(0,0,-1)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

5. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$

(a) Si $(a,b) \in Domf$ es un punto crítico de f, con $Domf = \mathbb{R}^2$, entonces satisface alguna de las siguientes condiciones:

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ o $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ no existe.

Donde $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + 2x$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, son las derivadas parciales de primer orden y están bien definidas en todo el dominio de la función. En consecuencia, sólo existen puntos críticos que cumplen la primera condición; esto es:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \Longrightarrow 2a + 2b = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \Longrightarrow 2b + 2a = 0$$

De donde se obtiene la única ecuación $a + b = 0$, que es una ecuación lineal en dos incógnitas, a y b, que se resuelve despejando cualquiera de sus variables. Despejando b de esta última ecuación, resulta $b = -a$; es decir, la ecuación lineal $a + b = 0$ tiene una infinidad de soluciones de la forma (a,b) tal que $b = -a$. Por ejemplo, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(\pi,-\pi)$, $(-\pi,\pi)$, $(7.2,-7.2)$ y $(-7.2,7.2)$ son algunas de las soluciones de dicha ecuación expresadas como pares ordenados. Por lo tanto, el conjunto solución de la ecuación $a + b = 0$ está dado por $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 | b = -a\}$. Este conjunto es el conjunto de puntos críticos de f. Gráficamente, los puntos críticos se encuentran ubicados en el plano xy sobre la recta de ecuación $y = -x$ (ver la figura 4.9).

(b) Se procede ahora a determinar si f alcanza un máximo o un mínimo local en los puntos críticos encontrados en (a), usando el Criterio de la Segunda Derivada. Calculando las derivadas parciales de segundo orden de f, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2 \quad \text{para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Luego, para cualquier punto crítico (a, b) de f:

$$\mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2$$

$$\Longrightarrow \mathcal{D} = (2)(2) - (2)^2 = 4 - 4 = 0$$

Como $\mathcal{D} = 0$ entonces falla el Criterio de la Segunda Derivada y se debe utilizar la definición de máximo o de mínimo absoluto para poder concluir. De este modo, se requiere establecer cuál de las siguientes condiciones es la que se cumple:

(i) $f(x,y) \leq f(a,b)$ para todo $(x,y) \in Domf$, si $f(a,b)$ es un máximo absoluto.

(ii) $f(a,b) \leq f(x,y)$ para todo $(x,y) \in Domf$, si $f(a,b)$ es un mínimo absoluto.

Donde, en este caso:

$$f(a,b) = a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + (-a)^2 + 2a(-a) \ = a^2 + a^2 - 2a^2 = 2a^2 - 2a^2 = 0$$

que se obtiene de evaluar la función f en cualquier punto crítico (a, b) con $b = -a$. Además, se requiere expresar de una forma más conveniente a la función f para poder compararla con el valor obtenido $f(a,b) = 0$ y, de este modo, determinar si dicho valor es el más grande o el más pequeño que toma f en todo su dominio; para esto, se procede a factorizar la función, la cual está definida como un trinomio cuadrado perfecto, tal como se muestra a continuación:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2 \text{ para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

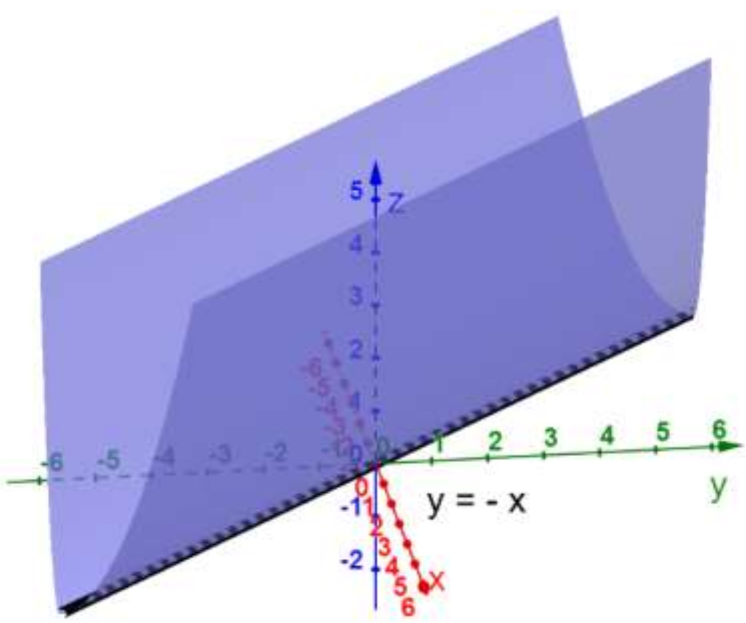
Como se tiene que

$$0 \leq (x+y)^2 \text{ para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\Longrightarrow f(a,b) \leq f(x,y) \text{ para todo } (x,y) \in Domf$$

Se concluye que f alcanza un mínimo absoluto en cada uno de sus puntos críticos (a, b) y el valor del mínimo absoluto es $f(a,b) = 0$. Ver la gráfica en la figura 4.9.

Figura 4.9 La función $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$ alcanza su mínimo absoluto en cada uno de sus puntos críticos, ubicados sobre la recta de ecuación $y = -x$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

6. $f(x,y) = xseny$

(a) Se buscan los puntos críticos de f dentro de su dominio que, de nuevo, es $Domf = \mathbb{R}^2$. Si $(a,b) \in Domf$ es un punto crítico de f, entonces se cumple alguna de las siguientes condiciones:

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ o $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ no existe.

Donde $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = seny$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xcosy$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, son las derivadas parciales de primer orden y están bien definidas en todo el dominio de la función. En consecuencia, sólo existen puntos críticos que satisfacen la primera condición; esto es:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \Longrightarrow senb = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0 \Longrightarrow acosb = 0$$

Resolviendo cada una de las ecuaciones anteriores:

$senb = 0 \Longrightarrow b = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \pm 5\pi, \ldots$

$\Longrightarrow b = k\pi$ con k cualquier número entero

$acosb = 0 \Longrightarrow a = 0$ o $cosb = 0$

$\Longrightarrow a = 0$ o $b = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{7\pi}{2}, \pm\frac{9\pi}{2}, \ldots$

$\Longrightarrow a = 0$ o $b = \frac{n\pi}{2}$ con n un entero impar

O bien:

$a = 0$ o $b = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ con k cualquier número entero

Se descartan los valores $b = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ con k cualquier número entero, debido a que en dichos valores la función $seny$ no vale 0, sino que vale -1 o 1. De aquí que, $a = 0$ y $b = k\pi$ con k cualquier número entero, son los valores que satisfacen ambas ecuaciones. Por lo tanto, el conjunto de puntos críticos de la función f es $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = 0,\ b = k\pi\ con\ k\ entero\}$, que también puede representarse por $\{(0,k\pi) \in \mathbb{R}^2 \mid k$ entero$\}$.

(b) Se procede ahora a determinar si f alcanza un máximo o un mínimo local en cada uno de los puntos críticos encontrados en (a), usando el Criterio de la Segunda Derivada. Calculando las derivadas parciales de segundo orden de f, se tiene que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -xseny \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = cosy$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

En particular, para cada punto crítico $(a,b) = (0,k\pi)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,k\pi) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,k\pi) = -(0)sen(k\pi) = 0$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, k\pi) = cos(k\pi) = \pm 1$

Luego:

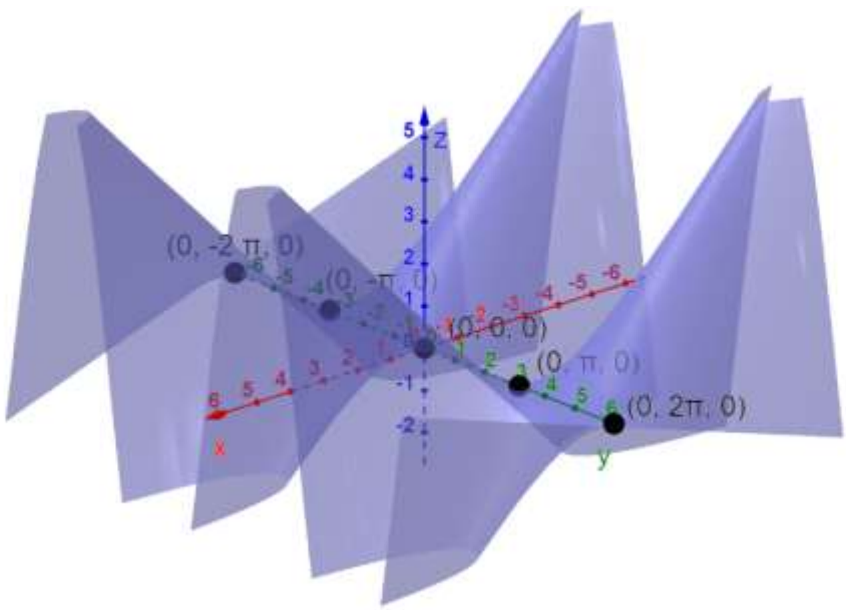
$$\mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\right)^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, k\pi)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, k\pi)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, k\pi)\right)^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{D} = (0)(0) - (\pm 1)^2 = -1$$

Como $\mathcal{D} = -1 < 0$ entonces, por el Criterio de la Segunda Derivada, f no alcanza ni un máximo ni un mínimo en cada uno de sus puntos críticos $(0, k\pi)$; es decir, $(0, k\pi)$ es un punto silla de f para cada número entero k. Más aún, en cada punto crítico la función toma el valor de 0, $f(0, k\pi) = (0)sen(k\pi) = 0$, para todo entero k. Ver la figura 4.10.

Figura 4.10 Para la función $f(x, y) = xseny$ todos sus puntos críticos son puntos silla, como $(0,0)$, $(0, -\pi)$, $(0, \pi)$, $(0, -2\pi)$, $(0,2\pi)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

A continuación, se presentan algunos problemas de aplicación de la teoría correspondiente a máximos y mínimos de funciones reales de dos variables, conocidos como problemas de optimización.

4.2.7 Problemas de optimización

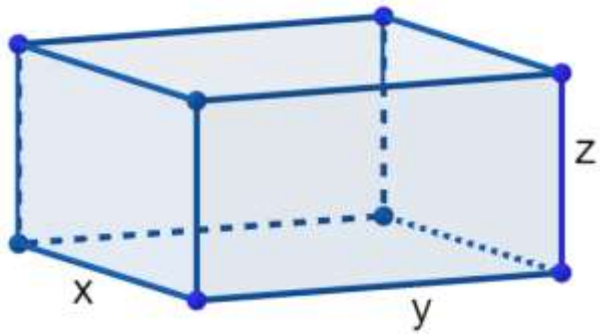
Problema 1

Si se desea construir una piscina rectangular con un volumen de $108\ m^3$, ¿cuáles son las dimensiones que debe tener la piscina para ocupar el mínimo de material para su construcción? (Adaptado a partir de Leithold, 1998, p. 995).

Solución:

En este caso, conviene iniciar realizando un dibujo que represente a la piscina, como el que se muestra en la figura 4.11, con la finalidad de tener más claro cuáles son sus dimensiones, al mismo tiempo que se asignan variables a éstas, con su correspondiente unidad de medida, por ejemplo, que x sea el ancho, y el largo y z la altura o profundidad, medidos en metros m.

Figura 4.11 Prisma rectangular que representa a la piscina del problema 1



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

Considerando la forma de prisma rectangular (paralelepípedo) que tiene, el volumen de la piscina en m^3 está dado por:

$$xyz = 108 \tag{1}$$

Mientras que la superficie de la piscina en m^2 está dada por:

$$S = xy + 2xz + 2yz \tag{2}$$

Donde, xy representa el área del fondo, $2xz$ el área de las dos paredes laterales y $2yz$ el área de la pared delantera y trasera, medidas en m^2.

Lo que se pide en este primer problema es encontrar los valores de las variables x, y y z, tales que S sea mínima, para lo cual se hará uso del Criterio de la Segunda Derivada.

Como se requiere "minimizar" la función S, que originalmente depende de tres variables, x, y y z, para poder aplicar la teoría vista anteriormente es necesario expresar la función S en sólo dos variables, digamos en las variables x y y.

Así, despejando la variable z de la ecuación (1) resulta $z = \frac{108}{xy}$ y sustituyendo este valor en la ecuación (2), se llega a la siguiente ecuación:

$$S = xy + 2x\left(\frac{108}{xy}\right) + 2y\left(\frac{108}{xy}\right) \tag{3}$$

O bien, simplificando:

$$S = xy + \frac{216}{y} + \frac{216}{x} \tag{4}$$

Donde la ecuación (4) ya representa una función real de dos variables y es posible aplicar el Criterio de la Segunda Derivada. A partir de este momento, se trabajará con la función

$$S(x, y) = xy + \frac{216}{y} + \frac{216}{x}$$

cuyo dominio es $DomS = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}$, donde $x > 0$ y $y > 0$ porque representan dimensiones de la piscina. Se buscan los puntos críticos (a, b) en el dominio de S tales que $\frac{\partial S}{\partial x}(a, b) = 0$ y $\frac{\partial S}{\partial y}(a, b) = 0$, donde las derivadas parciales de primer orden son:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x, y) = y - \frac{216}{x^2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial y}(x, y) = x - \frac{216}{y^2}$$

para todo $(x, y) \in DomS$. De este modo, la búsqueda de los puntos críticos de S se reduce a resolver las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial S}{\partial x}(a,b) = 0 \Longrightarrow b - \frac{216}{a^2} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial S}{\partial y}(a,b) = 0 \Longrightarrow a - \frac{216}{b^2} = 0 \tag{6}$$

De donde, multiplicando la ecuación (6) por b^2 se tiene que:

$$ab^2 - 216 = 0 \tag{7}$$

Despejando b de la ecuación (5) resulta $b = \frac{216}{a^2}$ y sustituyendo dicho valor en la ecuación (7) se llega a lo siguiente:

$$a\left(\frac{216}{a^2}\right)^2 - 216 = 0 \Longrightarrow a\frac{(216)^2}{(a^2)^2} = 216$$

$$\Longrightarrow a\frac{(216)^2}{a^4} = 216$$

$$\Longrightarrow \frac{(216)^2}{a^3} = 216$$

$$\Longrightarrow \frac{(216)^2}{216} = a^3$$

$$\Longrightarrow 216 = a^3$$

$$\Longrightarrow a = \sqrt[3]{216} = 6$$

Es decir, $a = 6$. Sustituyendo este valor en $b = \frac{216}{a^2}$, se tiene que $b = 6$. Por lo tanto, el único punto crítico de S es $(6,6)$. Además, las derivadas parciales de segundo orden de S son:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x,y) = \frac{432}{x^3} \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}(x,y) = \frac{432}{y^3} \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 \quad \text{para todo } (x,y) \in DomS$$

En particular, en $(6,6)$:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(6,6) = \frac{432}{(6)^3} = 2 \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}(6,6) = \frac{432}{(6)^3} = 2 \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}(6,6) = 1$$

Luego:

$$\mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}(a,b)\right) - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2$$

$$\Longrightarrow \mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(6,6)\right)\left(\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}(6,6)\right) - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}(6,6)\right)^2$$

$$\Longrightarrow \mathcal{D} = (2)(2) - (1)^2 = 4 - 1 = 3$$

Como $\mathcal{D} = 3 > 0$ y $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(6,6) = 2 > 0$ entonces, por el Criterio de la Segunda Derivada, S alcanza un mínimo local en su único punto crítico $(6,6)$ y el valor del mínimo local es $S(6,6) = 108$. Además, el valor de la variable z está dado por: $z = \frac{108}{xy} = \frac{108}{(6)(6)} = 3$.

Conclusión

Las dimensiones que debe tener la piscina para ocupar el mínimo de material para su construcción son 6 m de largo, 6 m de ancho y 3 m de altura.

Nótese que el Criterio de la Segunda Derivada se utilizó únicamente para comprobar que efectivamente la superficie de la piscina es mínima con las dimensiones encontradas, pero dichas dimensiones se obtuvieron al calcular el punto crítico de la función de superficie.

Problema 2

Se ha construido un tanque rectangular sin tapa con $48\ m^2$ de cemento. Encuentra el máximo volumen del tanque. (Adaptado a partir de Stewart, 1999, p. 978).

Solución:

Como en el problema anterior, asignando variables a las dimensiones del tanque con su correspondiente unidad de medida, supongamos que: x es el ancho, y es el largo y z la altura o profundidad, medidos en m. De aquí que, el volumen del tanque en m^3 está dado por:

$$V = xyz \tag{1}$$

Mientras que la superficie del tanque en m^2 está dada por:

$$xy + 2xz + 2yz = 48 \tag{2}$$

Lo que se pide en este segundo problema es encontrar el volumen máximo, para lo cual se hará uso nuevamente del Criterio de la Segunda Derivada.

Como se requiere "maximizar" la función V, que originalmente depende de tres variables, x, y y z, para poder aplicar la teoría vista sobre máximos y mínimos es necesario expresar la función V en términos de sólo dos variables, digamos x y y.

Así, despejando la variable z de la ecuación (2) resulta $z = \frac{48-xy}{2(x+y)}$ y sustituyendo este valor en la ecuación (1), se llega a la siguiente ecuación:

$$V = xy\left(\frac{48-xy}{2(x+y)}\right) \tag{3}$$

O bien, desarrollando:

$$V = \frac{48xy-x^2y^2}{2(x+y)} \tag{4}$$

Donde la ecuación (4) ya representa una función real de dos variables y es posible aplicar el Criterio de la Segunda Derivada. A partir de este momento, se trabajará con la función

$$V(x,y) = \frac{48xy-x^2y^2}{2(x+y)}$$

cuyo dominio es $DomV = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}$, donde $x > 0$ y $y > 0$ porque representan dos de las dimensiones del tanque. Se buscan los puntos críticos (a,b) en el dominio de V tales que $\frac{\partial V}{\partial x}(a,b) = 0$ y $\frac{\partial V}{\partial y}(a,b) = 0$, donde las derivadas parciales de primer orden son:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2(48-2xy-x^2)}{2(x+y)^2}$$

$\frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2(48-2xy-y^2)}{2(x+y)^2}$

para todo $(x, y) \in DomV$. De este modo, la búsqueda de los puntos críticos de V se reduce a resolver las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial V}{\partial x}(a, b) = 0 \Longrightarrow \frac{b^2(48-2ab-a^2)}{2(a+b)^2} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}(a, b) = 0 \Longrightarrow \frac{a^2(48-2ab-b^2)}{2(a+b)^2} = 0 \quad (6)$$

Considerando la ecuación (5) se llega a lo siguiente:

$$\frac{b^2(48-2ab-a^2)}{2(a+b)^2} = 0 \Longrightarrow b^2(48 - 2ab - a^2) = 0$$

$\Longrightarrow 48 - 2ab - a^2 = 0$ (puesto que $b > 0$)

Considerando ahora la ecuación (6) se llega a algo similar:

$$\frac{a^2(48-2ab-b^2)}{2(a+b)^2} = 0 \Longrightarrow a^2(48 - 2ab - b^2) = 0$$

$\Longrightarrow 48 - 2ab - b^2 = 0$ (puesto que $a > 0$)

Con las ecuaciones anteriores se forma un sistema de dos ecuaciones no lineales, que se muestra a continuación:

$$48 - 2ab - a^2 = 0$$

$$48 - 2ab - b^2 = 0$$

De donde, multiplicando la primera ecuación por -1 y sumando la segunda ecuación se obtiene lo siguiente:

$$\begin{array}{r} -48 + 2ab + a^2 = 0 \\ \underline{48 - 2ab - b^2 = 0} \\ a^2 - b^2 = 0 \end{array}$$

Esto a su vez implica que $a^2 = b^2$ y, en consecuencia, $a = b$. Luego, sustituir $a = b$ en la ecuación $48 - 2ab - a^2 = 0$ conduce a lo siguiente:

$$48 - 2ab - a^2 = 0 \Longrightarrow 48 - 2bb - b^2 = 0$$

$$\Longrightarrow 48 - 2b^2 - b^2 = 0$$

$$\Longrightarrow 48 - 3b^2 = 0$$

$$\Longrightarrow 3b^2 = 48$$

$$\Longrightarrow b^2 = \frac{48}{3} = 16$$

$$\Longrightarrow b = 4$$

De aquí que, $a = 4$. Por lo tanto, el único punto crítico de V es $(4,4)$. Además, las derivadas parciales de segundo orden de V son:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{y^2(y^2+48)}{(x+y)^3} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{x^2(x^2+48)}{(x+y)^3} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{xy(48-3xy-x^2-y^2)}{(x+y)^3}$$

para todo $(x,y) \in DomV$.

En particular, en $(4,4)$:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(4,4) = -\frac{4^2(4^2+48)}{(4+4)^3} = -2 \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(4,4) = -\frac{4^2(4^2+48)}{(4+4)^3} = -2$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(4,4) = \frac{(4)(4)(48-3(4)(4)-4^2-4^2)}{(4+4)^3} = -1$$

Luego:

$$\mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(a,b)\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(a,b)\right) - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2$$

$$\Longrightarrow \mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(4,4)\right)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(4,4)\right) - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(4,4)\right)^2$$

$$\Longrightarrow \mathcal{D} = (-2)(-2) - (-1)^2 = 4 - 1 = 3$$

Como $\mathcal{D} = 3 > 0$ y $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(4,4) = -2 < 0$ entonces, por el Criterio de la Segunda Derivada, V alcanza un máximo local en su único punto crítico $(4,4)$ y el valor del máximo local es $V(4,4) = 32$. Además, el valor de la variable z está dado por $z = \frac{48-xy}{2(x+y)} = \frac{48-(4)(4)}{2(4+4)} = 2$.

Conclusión

El volumen máximo de la caja es de $32\ m^3$ y se obtiene cuando las dimensiones del tanque son $4\ m$ de largo, $4\ m$ de ancho y $2\ m$ de altura.

Nótese nuevamente que el valor máximo de la función volumen se pudo calcular a partir del punto crítico encontrado y que el Criterio de la Segunda Derivada únicamente permite corroborar que el valor de la función en dicho punto efectivamente es un máximo.

Problema 3

Determina el punto en la superficie $z^2 = x^2 + y^2$ que es más cercano al punto $(-1,3,0)$. ¿Cuál es la distancia mínima? (Adaptado a partir de Purcell *et. al.*, 2007, p. 664).

Solución:

Como la distancia entre dos puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) está definida por

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Entonces la distancia de cualquier punto (x, y, z) sobre la superficie $z^2 = x^2 + y^2$ al punto $(-1,3,0)$ es:

$$d = \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2}$$

O bien:

$$d = \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2 + x^2 + y^2}$$

Donde $z^2 = x^2 + y^2$ por ser (x, y, z) cualquier punto sobre dicha superficie.

Si se define $f(x, y) = d^2$, entonces la función a "minimizar" es la siguiente:

$$f(x, y) = (x+1)^2 + (y-3)^2 + x^2 + y^2$$

A continuación, se buscan los puntos críticos (a, b) en el dominio de f tales que $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$, donde las derivadas parciales de primer orden son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2(x+1) + 2x = 4x + 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2(y-3) + 2y = 4y - 6$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. De este modo, los puntos críticos de f se obtienen resolviendo las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \Longrightarrow 4a + 2 = 0 \Longrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0 \Longrightarrow 4b - 6 = 0 \Longrightarrow b = \frac{3}{2}$$

De aquí que, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ es el único punto crítico de f.

Ahora se aplicará el Criterio de la Segunda Derivada para verificar que la función alcanza un mínimo en el punto crítico encontrado.

Las derivadas parciales de segundo orden de f son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En particular, en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = 0$$

Luego:

$$\mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\right)^2$$

$$\Longrightarrow \mathcal{D} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right)^2$$

$$\Longrightarrow \mathcal{D} = (4)(4) - (0)^2 = 16$$

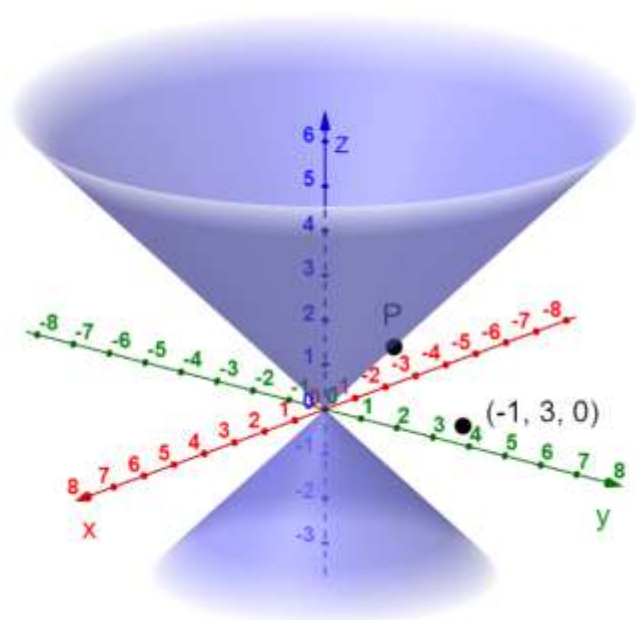
Como $\mathcal{D} = 16 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = 4 > 0$ entonces, por el Criterio de la Segunda Derivada, f alcanza un mínimo local en su único punto crítico $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y el valor del mínimo es $f\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = 5$; por lo que la distancia mínima es $\sqrt{5}$ (recuerda que se definió $f(x, y) = d^2$).

Además, el valor de la variable z está dado por $z^2 = x^2 + y^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$, de modo que $z = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Conclusión

El punto de la superficie $z^2 = x^2 + y^2$ que se encuentra más cercano al punto $(-1,3,0)$ es $P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$, siendo la distancia mínima igual a $\sqrt{5}$. Ver la gráfica en la figura 4.12.

Figura 4.12 Gráfica de $z^2 = x^2 + y^2$, donde $P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ es el punto más cercano a $(-1,3,0)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

4.3 Multiplicadores de Lagrange

Hasta este momento se han visto ya dos tipos de problemas que involucran la teoría de máximos y mínimos. En la sección 4.2.6, por ejemplo, se determinó el máximo local de la función $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4 - 1$; mientras que, en la sección 4.2.7 se optimizó la función $S = xy + 2xz + 2yz$ sujeta a la condición $xyz = 108$. La diferencia entre estos dos tipos de problema radica en la existencia o no de una restricción, por lo que a los problemas similares al primer ejemplo mencionado se les conoce como problemas con extremos libres y, a los que son semejantes al segundo ejemplo, como problemas con extremos restringidos.

En esta sección nos enfocaremos en los problemas de la segunda categoría y se resolverán con un método distinto al Criterio de la Segunda Derivada, que es el método de los multiplicadores de Lagrange, el cual se describe a continuación.

4.3.1 Método de multiplicadores de Lagrange

Suponiendo que f y g son funciones reales de dos variables con sus derivadas parciales de primer orden continuas y que la función f está sujeta a la restricción $g(x,y) = 0$, para determinar los extremos locales de f se lleva a cabo el siguiente proceso.

(i) Se consideran las ecuaciones $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ y $g(x,y) = 0$, donde recordemos que $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$ es el gradiente de f y $\nabla g(x,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)$ es el gradiente de g, y λ es una nueva variable conocida como multiplicador de Lagrange.

(ii) Se resuelve el sistema de ecuaciones obtenido en el paso (i); es decir, se calculan los valores de x, y, λ que satisfacen a las ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$$

$$g(x,y) = 0$$

De este modo, cada par ordenado (x,y) obtenido en la resolución de las ecuaciones anteriores es un punto donde f alcanza un extremo local.

Por otro lado, si se define la función $F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$ en el método de multiplicadores de Lagrange, la ecuación vectorial $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ queda satisfecha si y sólo si el vector $\nabla f(x,y) - \lambda \nabla g(x,y)$ es igual al vector cero. En otras palabras, se tiene lo siguiente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \iff \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \iff \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \iff \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \iff \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\lambda) = 0$$

$$g(x,y) = 0 \iff \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = 0$$

De aquí que, resolver las ecuaciones del paso (ii) del método de Lagrange es equivalente a calcular los puntos críticos de F, que son de la forma (x,y,λ).

Este método se puede extender para funciones reales de tres variables, considerando ahora las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)$$

$$g(x,y,z) = 0$$

Donde f está sujeta a la restricción $g(x,y,z) = 0$. Más aún, se puede extender para el caso en que aparecen varias restricciones; por ejemplo, si f es una función real que depende de las variables x, y, z y que está sujeta a las dos restricciones $g(x,y,z) = 0$ y $h(x,y,z) = 0$, entonces deberán considerarse dos multiplicadores de Lagrange, λ y μ, tales que

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu h(x,y,z)$$

En consecuencia, se tendrá que resolver el sistema de ecuaciones mostrado a continuación.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) + \mu \frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) + \mu \frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) + \mu \frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z)$$

$$g(x,y,z) = 0$$

$$h(x,y,z) = 0$$

4.3.2 Ejemplos sobre extremos locales, usando el método de multiplicadores de Lagrange

1. Determina el mínimo de $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeta a la restricción $g(x,y) = xy - 3 = 0$. (Adaptado a partir de Purcell *et. al.*, 2007, p. 671).

Solución:

En este caso, $\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$ y $\nabla g(x,y) = (y,x)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, de modo que $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ y $g(x,y) = 0$ conducen al siguiente sistema:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \quad \Longrightarrow \quad 2x = \lambda y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \quad \Longrightarrow \quad 2y = \lambda x$$

$$g(x,y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad xy - 3 = 0$$

Se procede a resolver el sistema, despejando λ de las primeras dos ecuaciones, es decir, $\lambda = \frac{2x}{y}$ y $\lambda = \frac{2y}{x}$, obteniéndose lo siguiente:

$$\frac{2x}{y} = \frac{2y}{x} \Longrightarrow 2x^2 = 2y^2$$

$$\Longrightarrow 2(x^2 - y^2) = 0$$

$$\Longrightarrow 2(x-y)(x+y) = 0$$

$$\Longrightarrow x = y \text{ o } x = -y$$

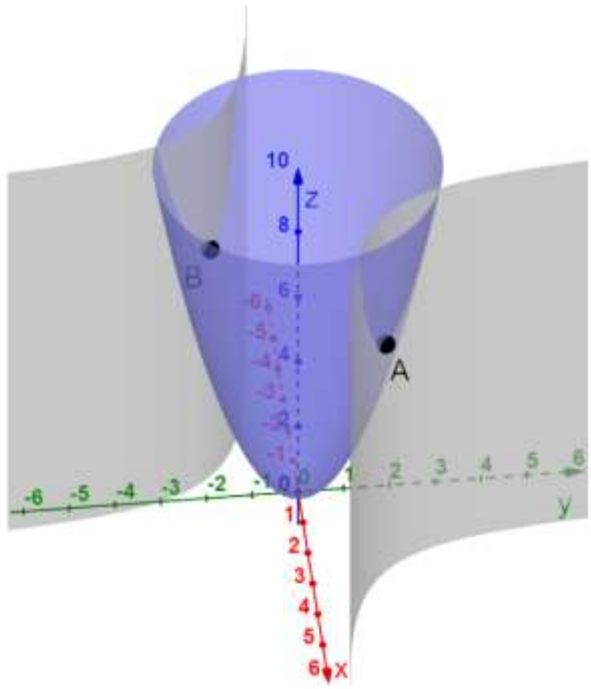
Sustituyendo $x = y$ en la tercera ecuación, $xy - 3 = 0$, y resolviendo para y se tiene que $y = \sqrt{3}$ o $y = -\sqrt{3}$; en efecto:

$$xy - 3 = 0 \text{ y } x = y \quad \Longrightarrow y^2 - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad y^2 = 3 \quad \Longrightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

Como se consideró que $x = y$, entonces también $x = \sqrt{3}$ o $x = -\sqrt{3}$. Sustituyendo ahora $x = -y$ en la tercera ecuación, $xy - 3 = 0$, se llega a que $y^2 = -3$, ecuación que no tiene solución real; por lo que, sólo es válida la primera opción. De aquí que, f puede alcanzar su mínimo local únicamente en los puntos $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ y $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$. Además, el multiplicador de Lagrange es $\lambda = \frac{2x}{y} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$ y el valor mínimo se obtiene como $f(\sqrt{3}, \sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 6$; o bien, $f(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2 = 6$.

En conclusión, el mínimo de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeta a la restricción $g(x,y) = xy - 3 = 0$ es 6. Ver la gráfica en la figura 4.13.

Figura 4.13 Gráficas de $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $xy - 3 = 0$, donde $A = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 6)$ y $B = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 6)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

2. Determina el mínimo de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a la restricción $x + 3y - 2z = 12$. (Adaptado a partir de Purcell *et. al.*, 2007, p. 671).

Solución:

En este caso, $g(x,y,z) = x + 3y - 2z - 12 = 0$ es la restricción de la función f. Aplicando el método de multiplicadores de Lagrange, como primer paso, se forma el siguiente sistema

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) \quad \Rightarrow \quad 2x = \lambda$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) \quad \Rightarrow \quad 2y = 3\lambda$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) \quad \Rightarrow \quad 2z = -2\lambda$$

$$g(x,y,z) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 3y - 2z - 12 = 0$$

De la primera ecuación, $\lambda = 2x$, y sustituyendo esto en la segunda ecuación, $2y = 3\lambda$, se tiene que $2y = 3\lambda = 3(2x) = 6x$, o bien, $y = 3x$. De manera semejante, sustituyendo $\lambda = 2x$ en la tercera ecuación, $2z = -2\lambda$, se obtiene que $2z = -2\lambda = -2(2x) = -4x$, de donde $z = -2x$.

Sustituyendo las expresiones $y = 3x$ y $z = -2x$ en la cuarta ecuación se llega a lo siguiente:

$x + 3y - 2z - 12 = 0$ con $y = 3x$ y $z = -2x$ $\Rightarrow$ $x + 3(3x) - 2(-2x) - 12 = 0$

$\Rightarrow x + 9x + 4x - 12 = 0$

$\Rightarrow 14x - 12 = 0$

$\Rightarrow 14x = 12$

$\Rightarrow x = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$

De aquí que $y = 3x = 3\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{18}{7}$ y $z = -2x = -2\left(\frac{6}{7}\right) = -\frac{12}{7}$. Además, el multiplicador de Lagrange está dado por $\lambda = 2x = 2\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{12}{7}$. Como $\left(\frac{6}{7}, \frac{18}{7}, -\frac{12}{7}\right)$ es el único punto donde la función alcanza su extremo local, entonces el valor del mínimo está dado por

$$f\left(\frac{6}{7}, \frac{18}{7}, -\frac{12}{7}\right) = \left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{18}{7}\right)^2 + \left(-\frac{12}{7}\right)^2 = \frac{72}{7}$$

En conclusión, el mínimo de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a la restricción $x + 3y - 2z = 12$ es $\frac{72}{7}$.

3. Si se desea construir una piscina rectangular con un volumen de $108\, m^3$, ¿cuáles son las dimensiones que debe tener la piscina para ocupar el mínimo de material para su construcción?

Solución:

En la sección 4.2.7 se resolvió este problema mediante el Criterio de la Segunda Derivada. Ocupando ahora el método de multiplicadores de Lagrange, se tiene que $S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ es la función a "minimizar" y está sujeta a la restricción $V(x, y, z) = xyz - 108 = 0$, por lo que se procede a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) \quad \Longrightarrow \quad y + 2z = \lambda yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) \quad \Longrightarrow \quad x + 2z = \lambda xz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \lambda \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) \quad \Longrightarrow \quad 2x + 2y = \lambda xy$$

$$g(x, y, z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad xyz - 108 = 0$$

Despejando λ de la primera ecuación, $y + 2z = \lambda yz$, se tiene que $\lambda = \frac{y+2z}{yz}$; de manera semejante, si se despeja λ de la segunda ecuación, $x + 2z = \lambda xz$, se obtiene que $\lambda = \frac{x+2z}{xz}$. Luego:

$$\frac{y+2z}{yz} = \frac{x+2z}{xz}$$

$$\Longrightarrow \quad xz(y + 2z) = yz(x + 2z)$$

$$\Longrightarrow \quad x(y + 2z) = y(x + 2z)$$

$$\Longrightarrow \quad xy + 2xz = xy + 2yz$$

$$\Longrightarrow \quad 2xz = 2yz$$

$$\Longrightarrow \quad x = y$$

Sustituyendo $y = x$ en la tercera ecuación, $2x + 2y = \lambda xy$, se tiene que $2x + 2x = \lambda x^2$, o bien, $4x = \lambda x^2$, de donde $\lambda = \frac{4x}{x^2} = \frac{4}{x}$. Sustituyendo ahora $\lambda = \frac{4}{x}$ en la segunda ecuación, $x + 2z = \lambda xz$, se obtiene que $z = \frac{1}{2}x$; en efecto:

$$x + 2z = \lambda xz \text{ con } \lambda = \frac{4}{x}$$

$$\Longrightarrow \quad x + 2z = \left(\frac{4}{x}\right)xz$$

$$\Longrightarrow \quad x + 2z = 4z$$

$\Longrightarrow \quad 2z = x$

$\Longrightarrow \quad z = \frac{1}{2}x$

Si se sustituyen las expresiones $y = x$ y $z = \frac{1}{2}x$ en la cuarta ecuación, $xyz - 108 = 0$, se llega a lo siguiente:

$xyz - 108 = 0$ con $y = x$ y $z = \frac{1}{2}x$

$\Longrightarrow \quad xx\left(\frac{1}{2}x\right) - 108 = 0$

$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}x^3 = 108$

$\Longrightarrow \quad x^3 = 216$

$\Longrightarrow \quad x = \sqrt[3]{216}$

$\Longrightarrow \quad x = 6$

De aquí que, $y = x = 6$ y $z = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(6) = 3$; es decir, $(6,6,3)$ es el único punto donde la función S alcanza un extremo local que, en este caso, es un mínimo y está dado por:

$S(6,6,3) = (6)(6) + 2(6)(3) + 2(6)(3) = 108$

Además, el multiplicador de Lagrange queda como $\lambda = \frac{4}{x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

En conclusión, las dimensiones que debe tener la piscina para ocupar el mínimo de material para su construcción son 6 m de ancho, 6 m de largo y 3 m de profundidad.

Ejercicios Propuestos

En los ejercicios 1 a 8, halla $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

1. $f(x,y) = \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$

2. $f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$

3. $f(x,y) = \frac{4xy-x^2y^2}{2(x+y)}$

4. $f(x,y) = xe^{3y} + 5x^2y$

5. $f(x,y) = e^x sen(2y) + \ln(xy)$

6. $f(x,y) = \cos(x^2y^3)$

7. $f(x,y) = e^{-xy^2} + 2x^5y^4$

8. $f(x,y) = tan(x - 2y)$

9. Verifica que $\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ si $f(x,y,z) = ze^{-xy} + x^2yz^3$. (Adaptado a partir de Marsden y Tromba, 1991, p. 166).

10. Considerando que una función $u = f(x,y)$ con derivadas parciales de segundo orden continuas (es decir, u es de clase C^2) es armónica si satisface la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, determina si la función $f(x,y) = e^x seny$ es armónica. (Adaptado a partir de Marsden y Tromba, 1991, p. 167).

En los ejercicios 11 a 18, realiza lo que se pide a continuación.

a) Encuentra los puntos críticos de f.

b) Determina en qué puntos críticos f tiene un extremo local e indica su valor y cuáles son puntos silla, utilizando el Criterio de la Segunda Derivada.

11. $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$

12. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 5xy$

13. $f(x,y) = 2y^4 - y^2 + x^2 + 3x$

14. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$

15. $f(x,y) = ycosx$

16. $f(x,y) = ln(2 + x^2 + y^2)$

17. $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$

18. $f(x,y) = e^{1-x^2-y^2}$
(Adaptado a partir de Marsden y Tromba, 1991, p. 262).

19. Determina las dimensiones de una caja rectangular con volumen máximo que tiene un área total de su superficie igual a $864\, cm^2$. Utiliza el Criterio de la Segunda Derivada para comprobar que, efectivamente, el volumen es máximo. (Adaptado a partir de Stewart, 1999, p. 982).

20. Se desea construir un tanque rectangular con tapa donde el costo del frente y la parte posterior es 1 dólar el pie cuadrado, la tapa y el fondo cuestan 2 dólares el pie cuadrado y los dos extremos cuestan 3 dólares el pie cuadrado. Si el volumen del tanque es de $384\ ft^3$, ¿cuál es el costo mínimo? Utiliza el Criterio de la Segunda Derivada para comprobar que, efectivamente, el costo es mínimo. (Adaptado a partir de Leithold, 1998, p. 1002).

21. Encuentra el punto del plano $2x - y + z = 1$ que está más cerca del punto $(-2,3,1)$. Utiliza el Criterio de la Segunda Derivada para comprobar que, efectivamente, se tiene una distancia mínima. (Adaptado a partir de Stewart, 1999, p. 982).

22. Resuelve el ejercicio 19 por el método de multiplicadores de Lagrange.

23. Resuelve el ejercicio 21 por el método de multiplicadores de Lagrange.

Apéndice A. Fórmulas Básicas de Álgebra y Trigonometría

Exponentes y radicales

$a^0 = 1$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^m a^n = a^{m+n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(ab)^n = a^n b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$\sqrt[n]{ab} = \left(\sqrt[n]{a}\right)\left(\sqrt[n]{b}\right)$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Productos notables y factorización

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Identidades fundamentales

$sen\theta csc\theta = 1$

$cos\theta sec\theta = 1$

$tan\theta cot\theta = 1$

$tan\theta = \frac{sen\theta}{cos\theta}$

$cot\theta = \frac{cos\theta}{sen\theta}$

$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$

$tan^2\theta + 1 = sec^2\theta$

$cot^2\theta + 1 = csc^2\theta$

$sen^2\theta = \frac{1}{2}(1 - cos2\theta)$

$cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + cos2\theta)$

Argumento doble

$sen2\theta = 2sen\theta cos\theta$

$cos2\theta = \cos^2 \theta - sen^2\theta$

$tan2\theta = \frac{2tan\theta}{1-tan^2 \theta}$

Apéndice B. Uso de GeoGebra

La *Suite Calculadora GeoGebra* es una aplicación de software libre que relaciona de forma dinámica la geometría con el álgebra. Es posible acceder en línea a ésta, a través del vínculo https://www.geogebra.org/calculator; o bien, descargar la aplicación de escritorio desde https://www.geogebra.org/download?lang=es

En esta sección se describe de manera detallada cómo se ocupó la aplicación de escritorio para realizar algunas de las gráficas presentadas en el primer capítulo.

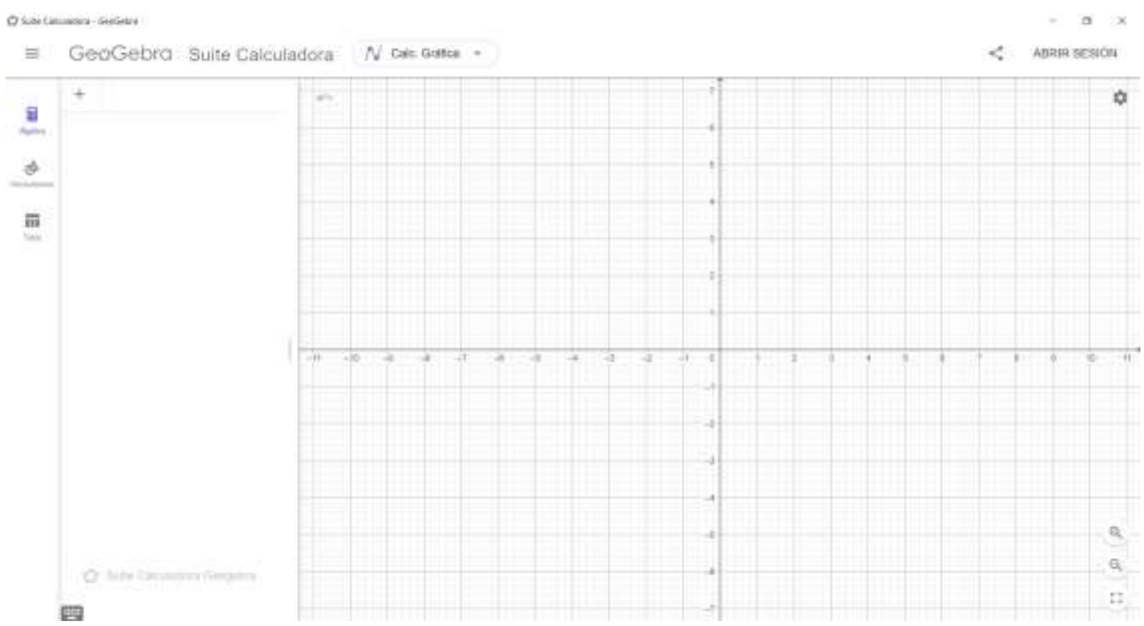
Uso de la calculadora gráfica GeoGebra Clásico

La calculadora gráfica GeoGebra Clásico es ideal para generar la gráfica de una curva (en dos dimensiones), como es el caso de la gráfica de una función real de una variable. En particular, en el capítulo 1 de este libro, se utilizó esta herramienta para realizar las trazas de la gráfica de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$, en sus respectivos planos.

Con la finalidad de ilustrar el uso de GeoGebra, a continuación, se muestra paso a paso cómo se generó la gráfica de la traza xz de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$; es decir, la gráfica de la ecuación $z = x^2$, que es una parábola ubicada en el plano xz.

Paso 1. Se ingresó a la aplicación de escritorio, donde de inmediato se puede apreciar el plano cartesiano; su interfaz se visualiza como en la figura B.1.

Figura B.1 Inicio en la calculadora gráfica GeoGebra

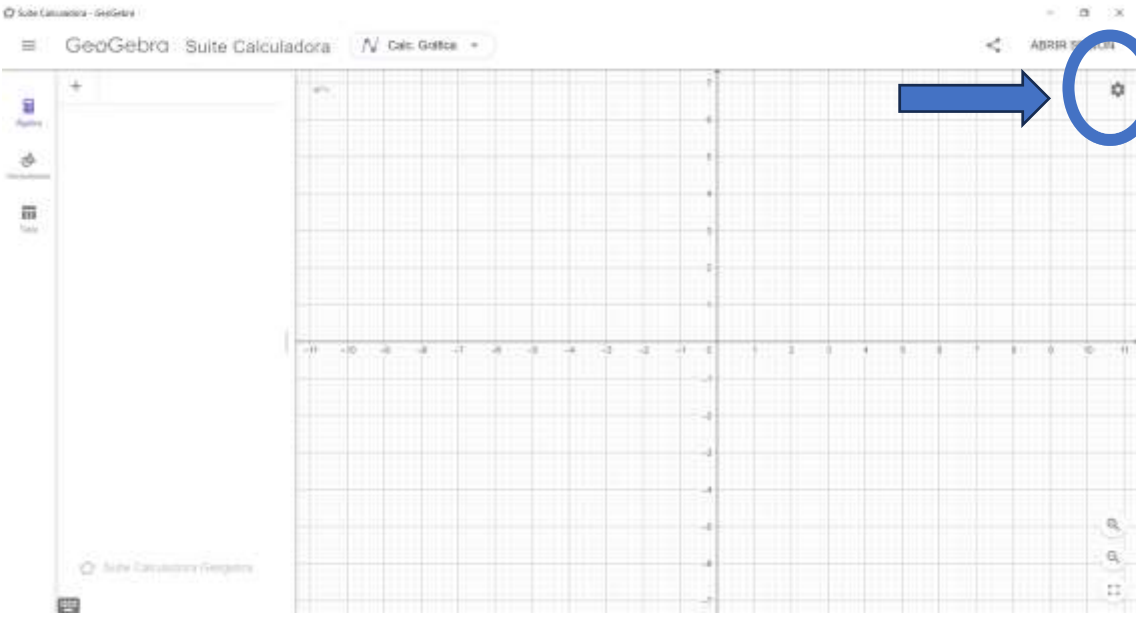


Fuente: Elaboración propia

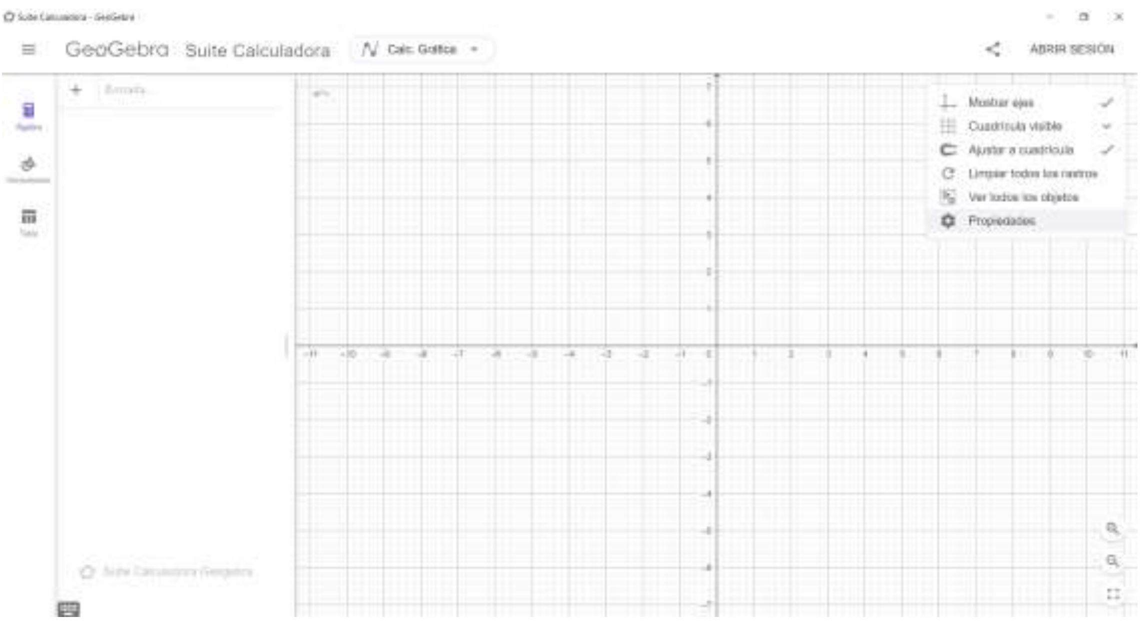
Paso 2. Se buscaron las propiedades del plano cartesiano, dando clic en la esquina superior derecha, como se indica en la figura B.2 (i)-(ii).

Figura B.2 (i)-(ii) Ingreso a la opción *"Propiedades"*

(i) Se dio clic en el ícono de *"Propiedades"*



(ii) Se seleccionó la última opción, *"Propiedades"*, del menú que se desplegó

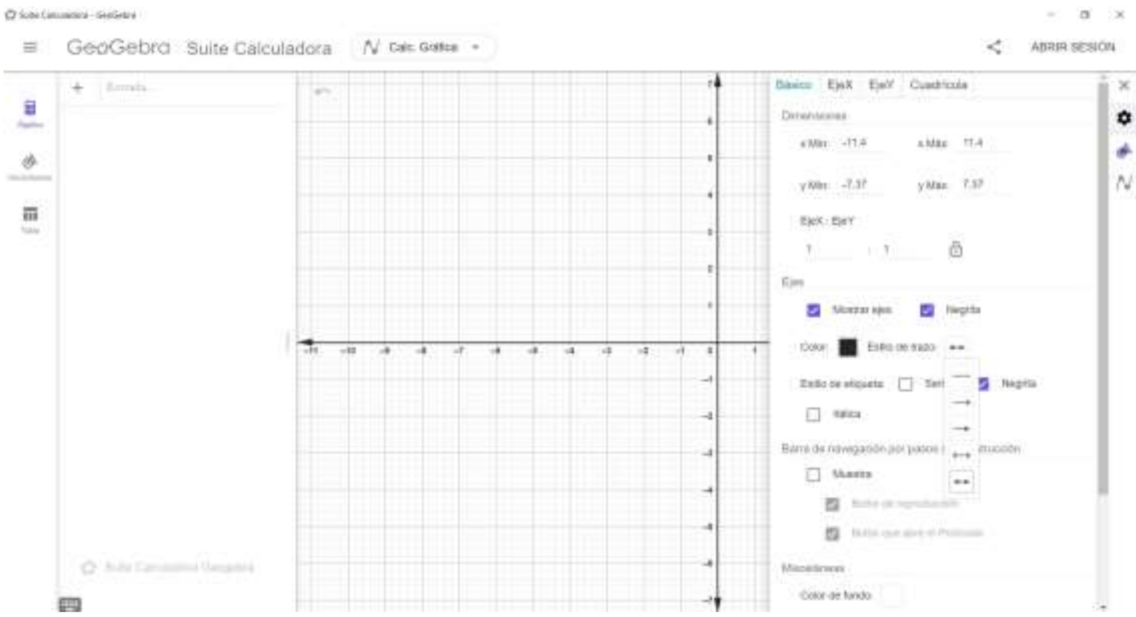


Fuente: Elaboración Propia

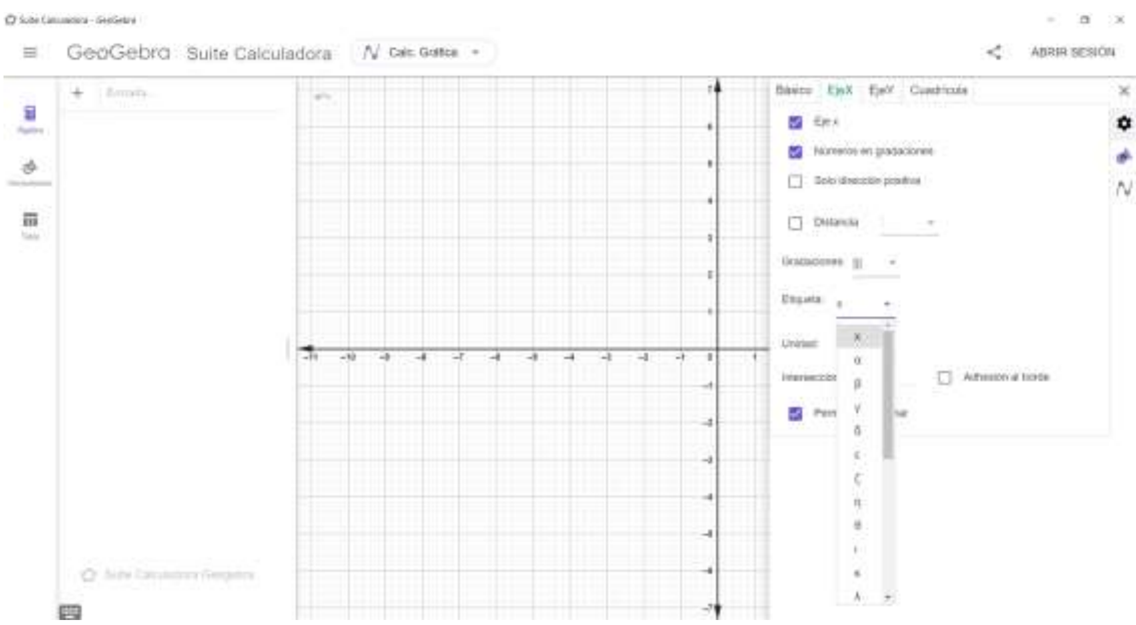
Paso 3. Se aumentó el tamaño de la letra, se ocultó la cuadrícula que aparece en el fondo, se etiquetaron los ejes coordenados y se optó por resaltar en negrita, tanto los ejes como su numeración, ingresando en *"Propiedades"*, que es la última opción del menú que se desplegó en el paso anterior. Ver la figura B.3(i)-(v).

Figura B.3 (i)-(v) Cambios realizados al plano cartesiano

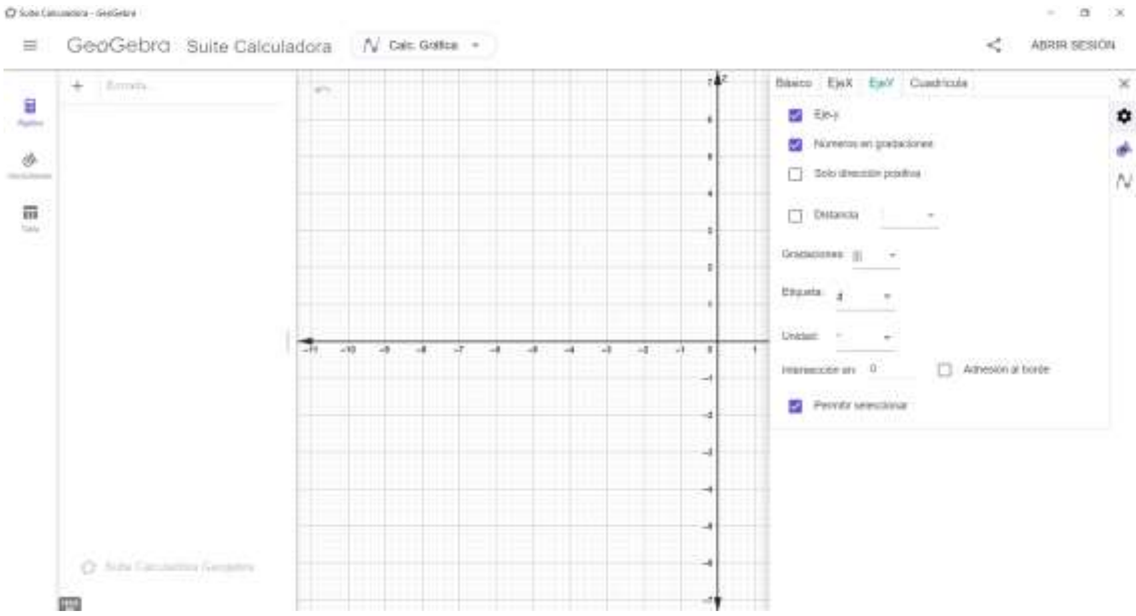
(i) Se seleccionó *"Negrita"*, tanto en *"Ejes"* como en *"Estilo de etiqueta"*, ingresando en la primera opción: *"Básico"*



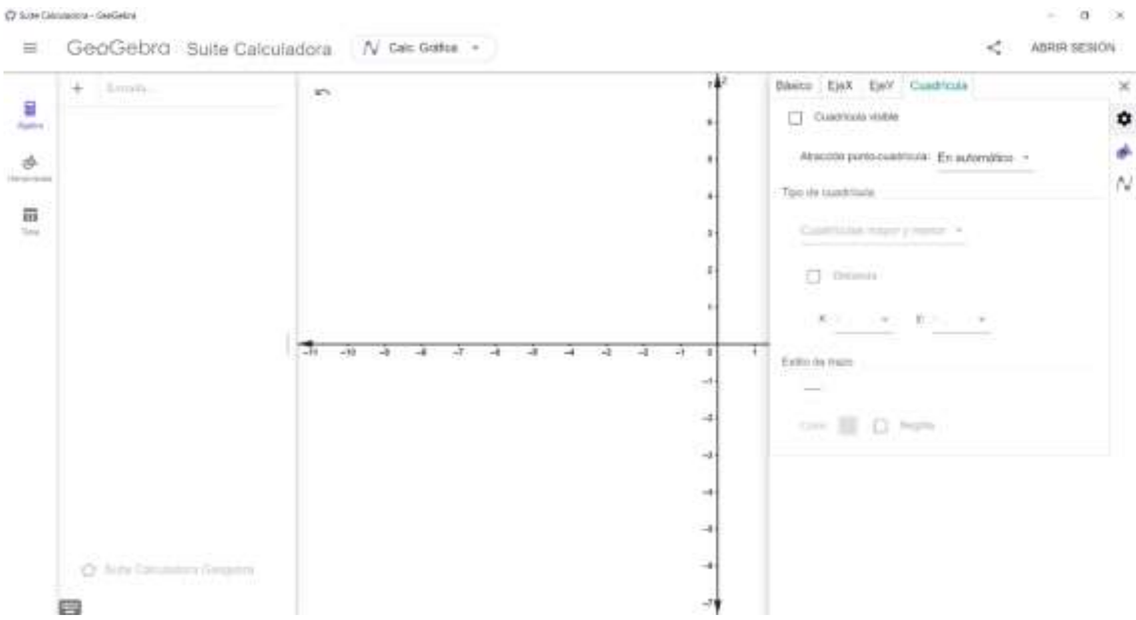
(ii) Se seleccionó la letra x, en *"Etiqueta"*, ingresando en la segunda opción: *"EjeX"*



(iii) Se escribió directamente la letra z, en *"Etiqueta"*, ingresando en la tercera opción: *"EjeY"*



(iv) Se quitó la selección de *"Cuadrícula visible"*, ingresando en la cuarta opción: *"Cuadrícula"*



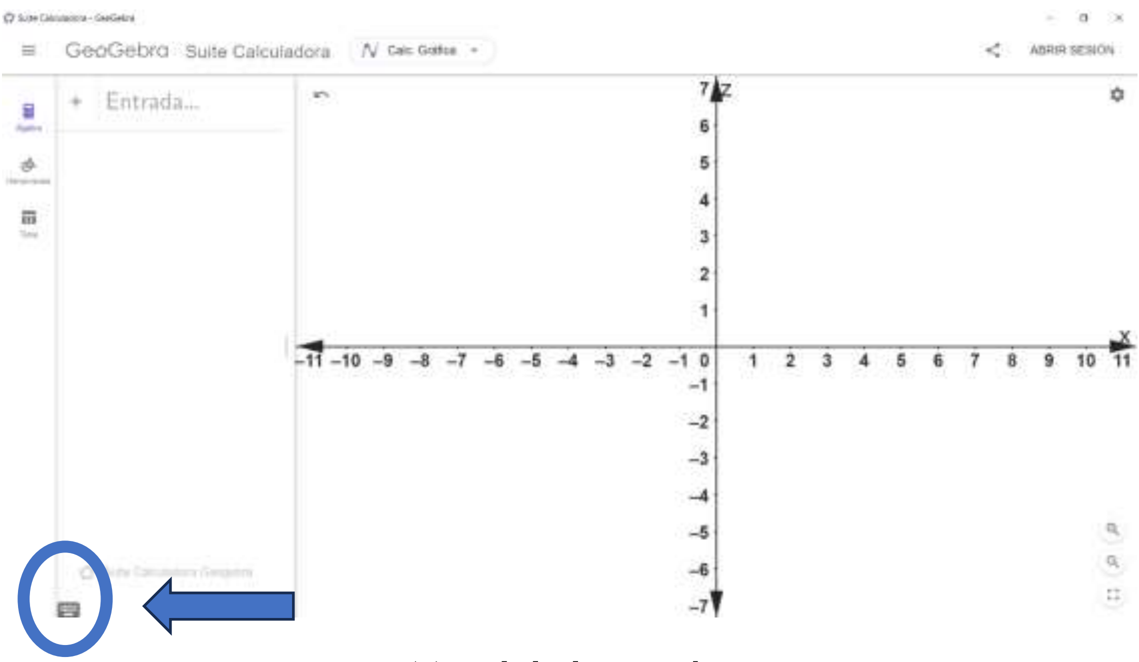
(v) Se seleccionó la opción 32 pt, en *"Tamaño de letra",* ingresando en *"Global"*

Fuente: Elaboración Propia

Paso 4. Se ingresó la ecuación $y = x^2$, como *"Entrada"*, lo cual se puede realizar directamente con el teclado de la computadora o con el teclado de GeoGebra, que está ubicado en la esquina inferior izquierda, de modo que se genera automáticamente la gráfica correspondiente. Es importante señalar que, en GeoGebra Clásico, al ingresar la ecuación $z = x^2$ no se despliega ninguna gráfica en virtud de que el eje z no está definido dentro del sistema de coordenadas de dos dimensiones; es decir, el eje vertical se corresponde únicamente con el eje y. Ver la figura B.4(i)-(iii).

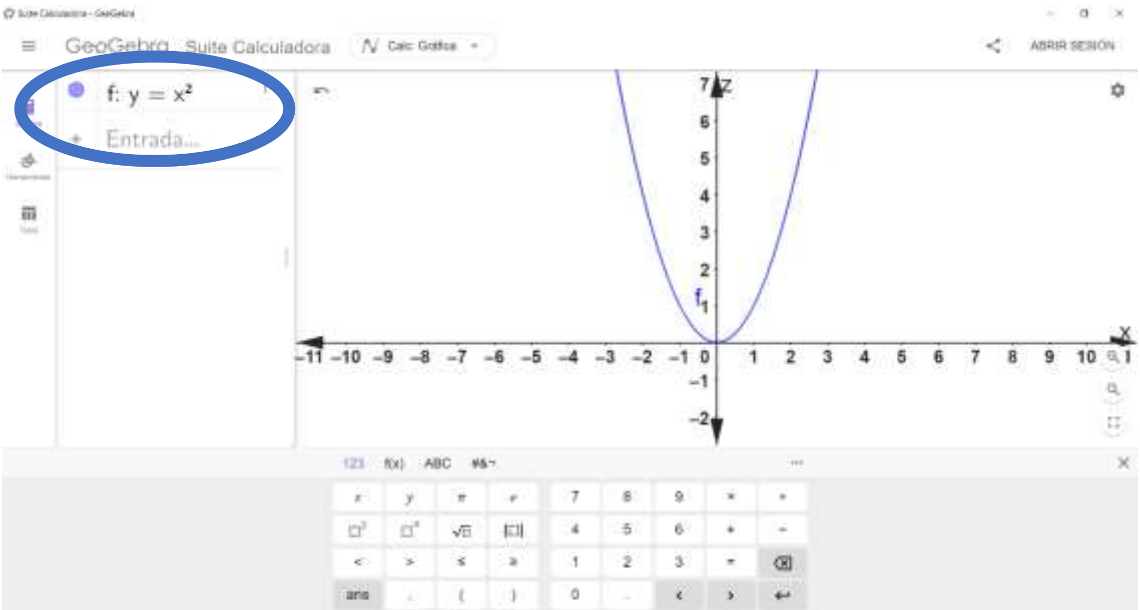
Figura B.4(i)-(iii) Gráfica de $y = x^2$

(i) Teclado de GeoGebra minimizado



(ii) Teclado de GeoGebra

(iii) Ingreso de la ecuación $y = x^2$

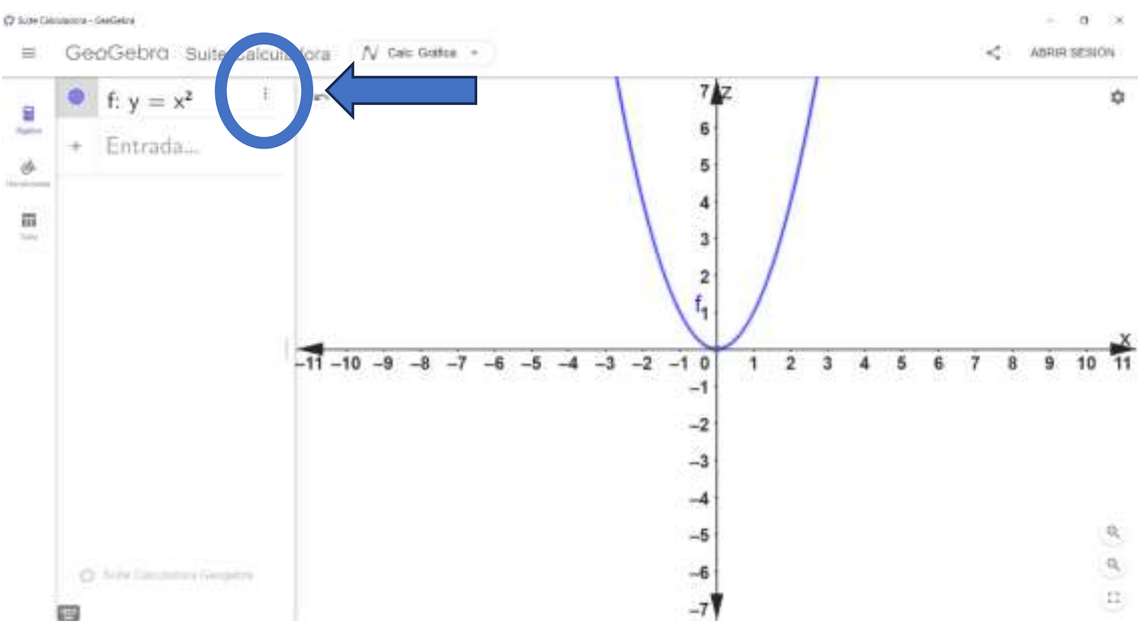


Fuente: Elaboración Propia

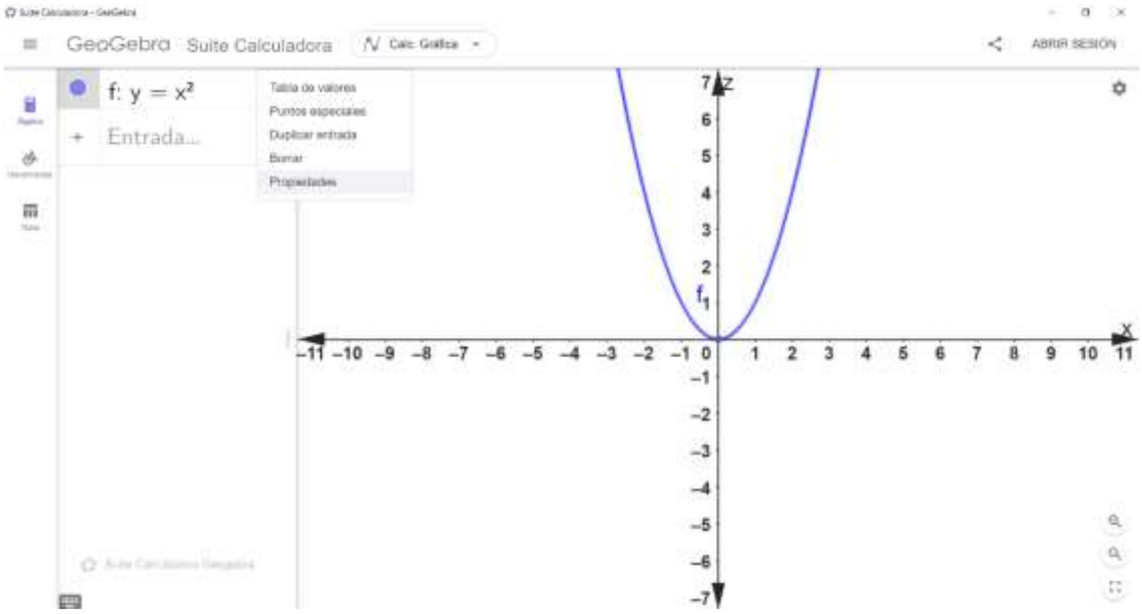
Paso 5. Se realizaron cambios en cuanto a las propiedades de la gráfica, como grosor y etiqueta, de modo que sea consistente con la gráfica de la ecuación $z = x^2$, seleccionando la entrada y dando clic en los "tres puntos" que aparecen en ésta, como se muestra en la figura B.5(i)-(vi).

Figura B.5(i)-(vi) Cambios realizados a las propiedades de la gráfica de $y = x^2$ para obtener la gráfica de $z = x^2$

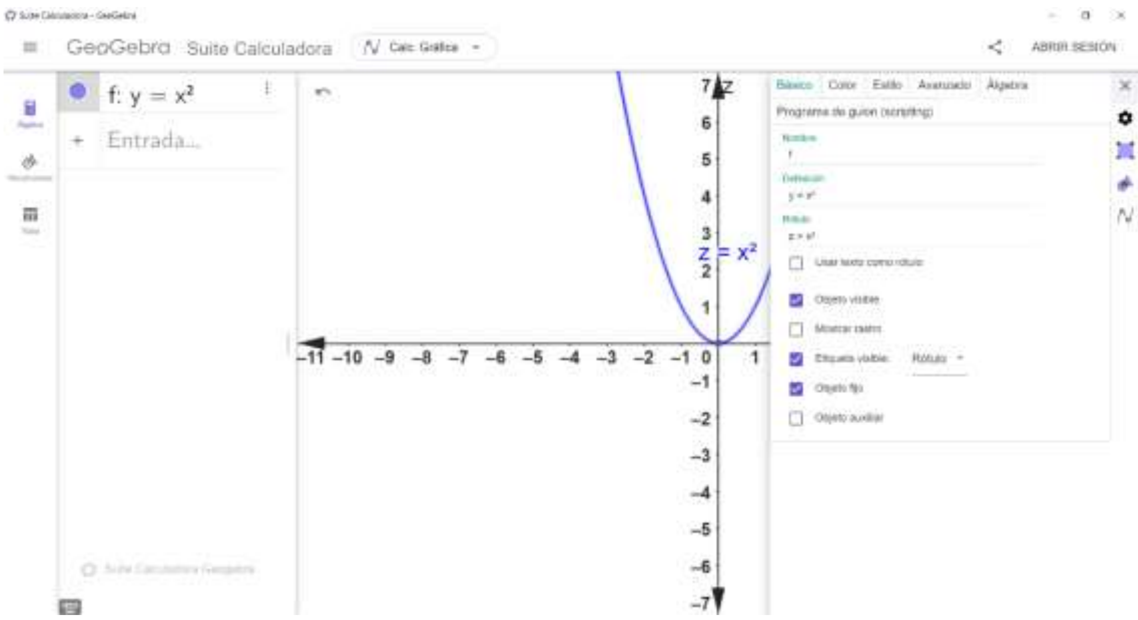
(i) Se dio clic en el ícono de los tres puntos que contiene las propiedades de la gráfica



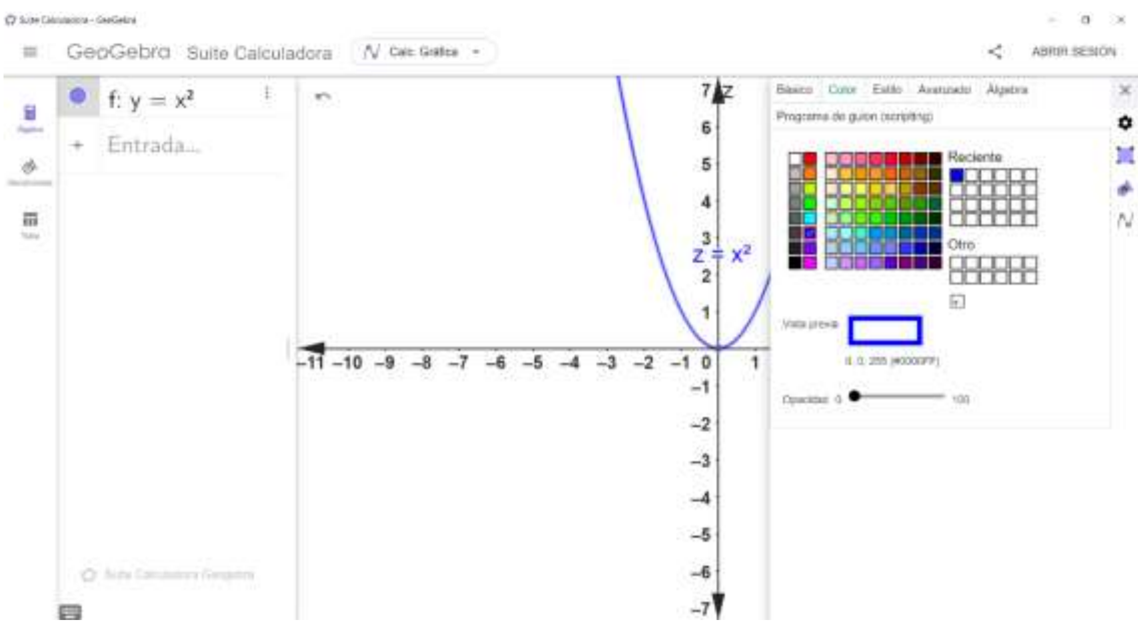
(ii) Se seleccionó la última opción, *"Propiedades"*, del menú que se desplegó



(iii) Se escribió $z = x^2$, en *"Rótulo"*, ingresando en la primera opción: *"Básico"*

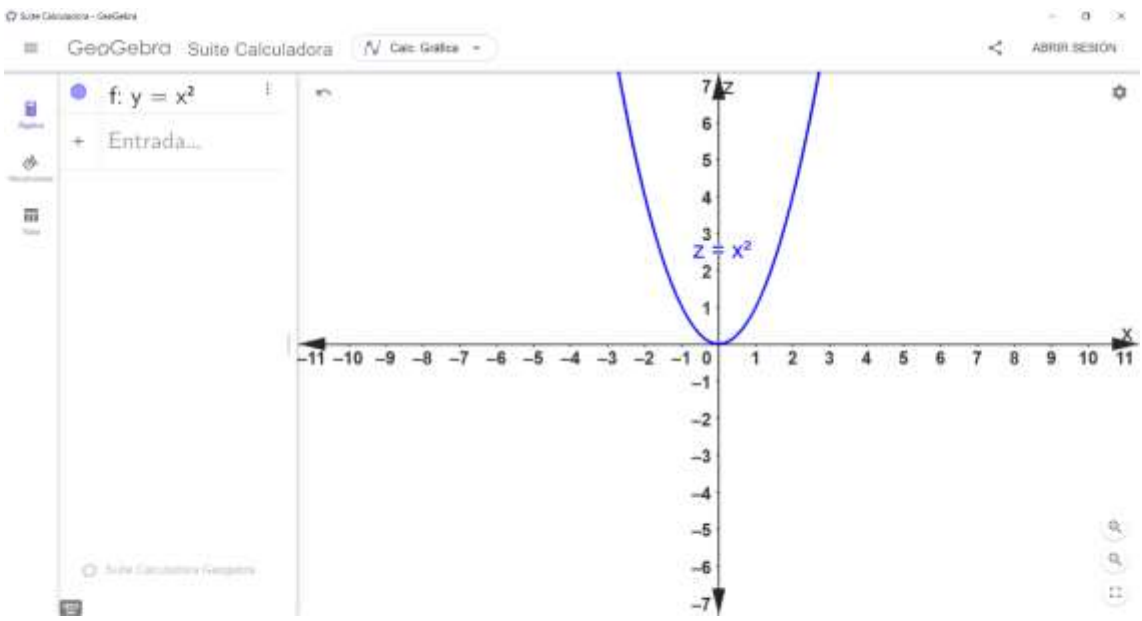


(iv) Se seleccionó el color, ingresando en la segunda opción: *"Color"*



(v) Se aumentó el grosor y la opacidad del trazo, ingresando en la tercera opción: *"Estilo"*

(vi) Gráfica de la ecuación $z = x^2$

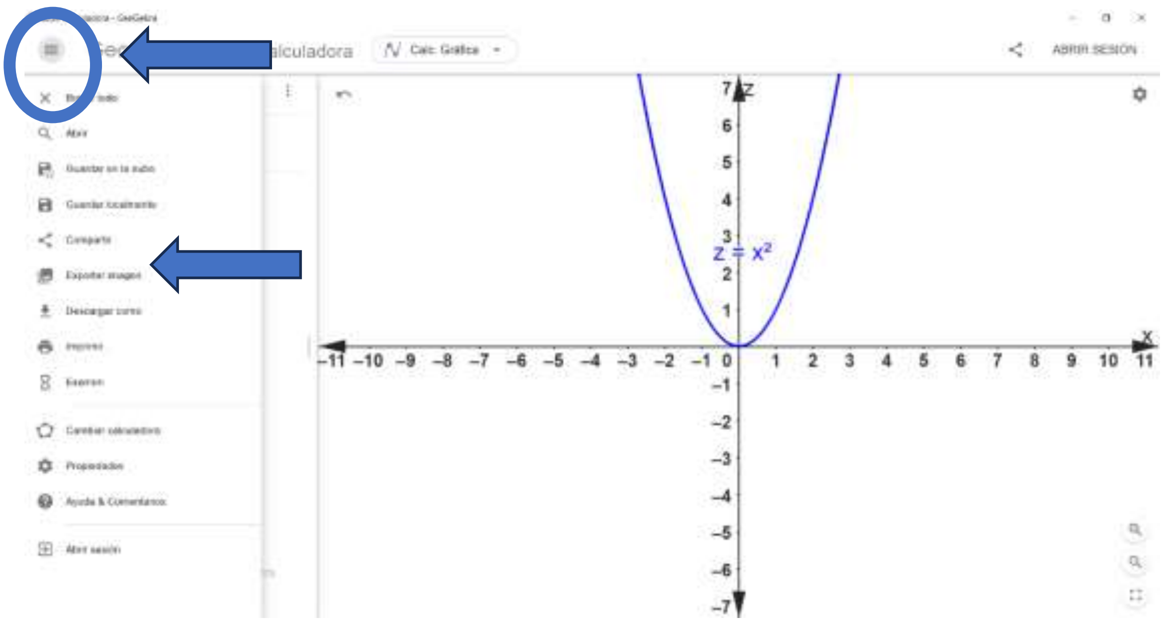


Fuente: Elaboración Propia

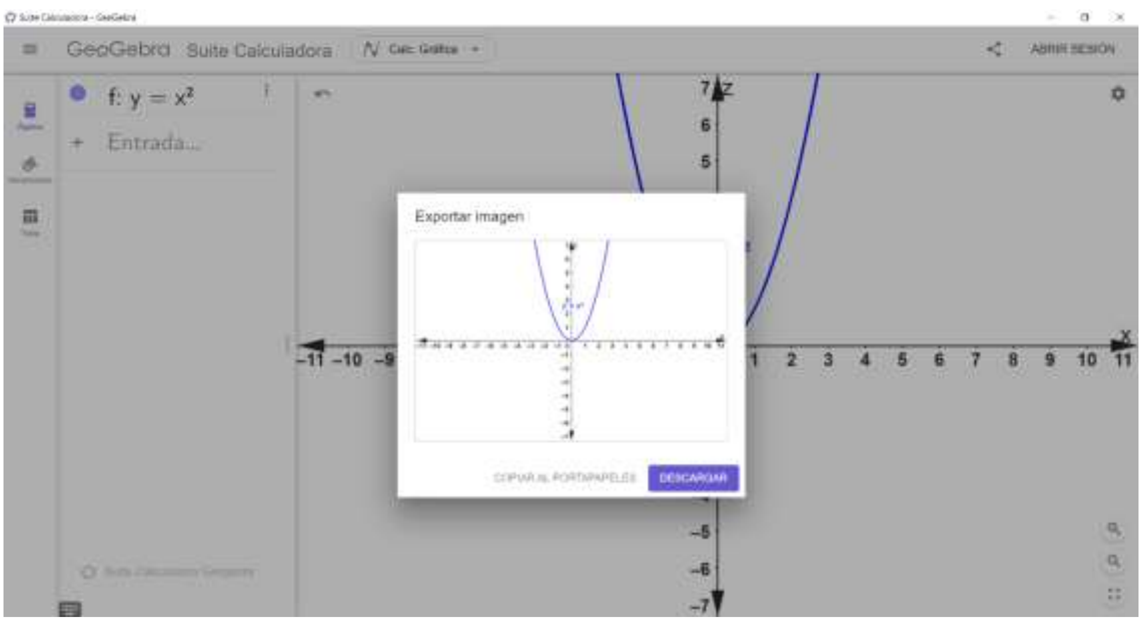
Paso 6. Se descargó la gráfica como imagen, dando clic en la esquina superior izquierda, como se indica en la figura B.6(i)-(ii).

Figura B.6(i)-(ii) Descarga de la gráfica como imagen

(i) Se dio clic en la esquina superior izquierda y se seleccionó *"Exportar imagen"*



(ii) Se dio clic en "DESCARGAR"



Fuente: Elaboración Propia

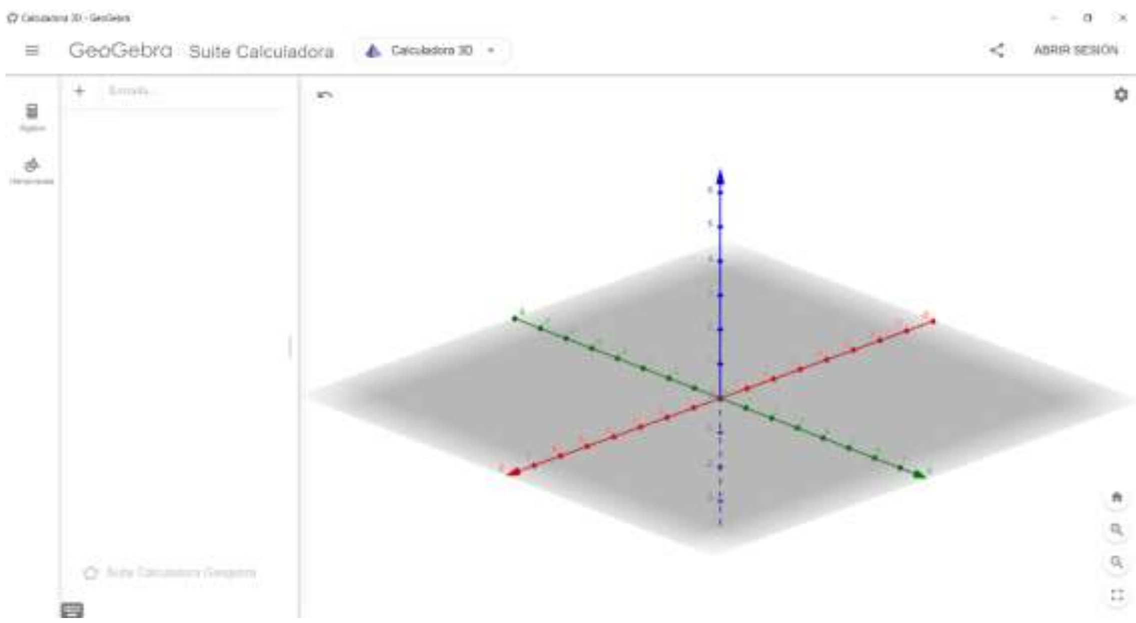
Uso de la calculadora gráfica GeoGebra 3D

Por otro lado, la calculadora gráfica GeoGebra 3D permite generar la gráfica de una superficie (en tres dimensiones), como es el caso de la gráfica de una función real de dos variables. En particular, en el capítulo 1 de este libro, se ocupó para realizar la gráfica de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Con la finalidad de ilustrar el uso de GeoGebra 3D, a continuación, se muestra paso a paso cómo se generó la gráfica de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Paso 1. Se ingresó a la aplicación de escritorio, donde de inmediato se puede apreciar el sistema de coordenadas tridimensional; su interfaz se visualiza como en la figura B.7.

Figura B.7 Inicio en la calculadora gráfica GeoGebra 3D

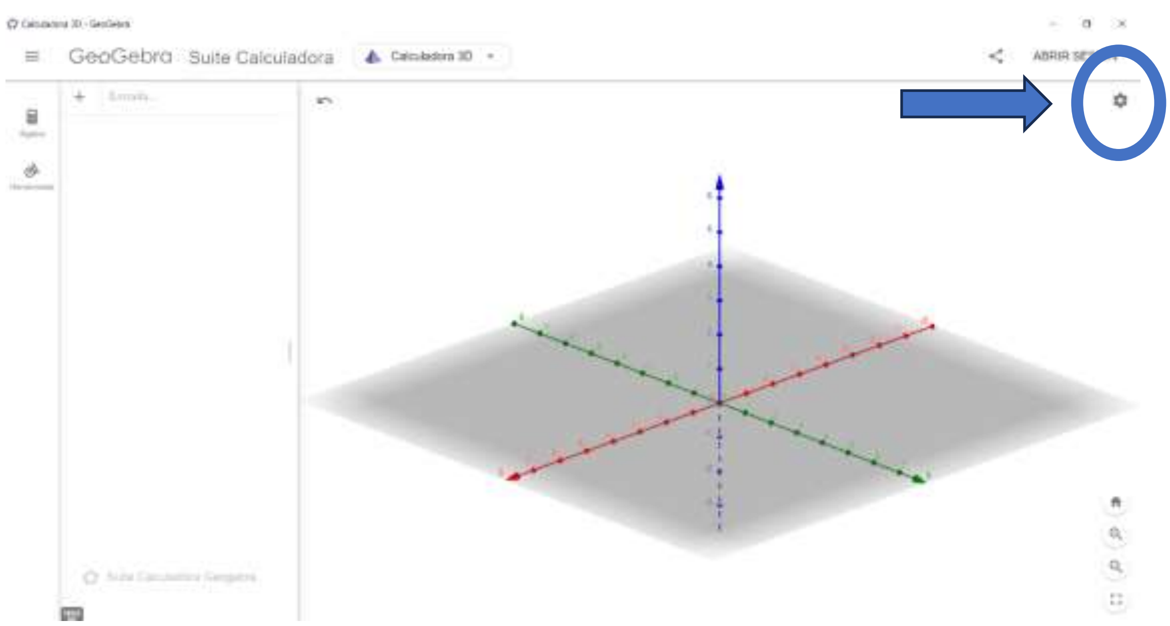


Fuente: Elaboración Propia

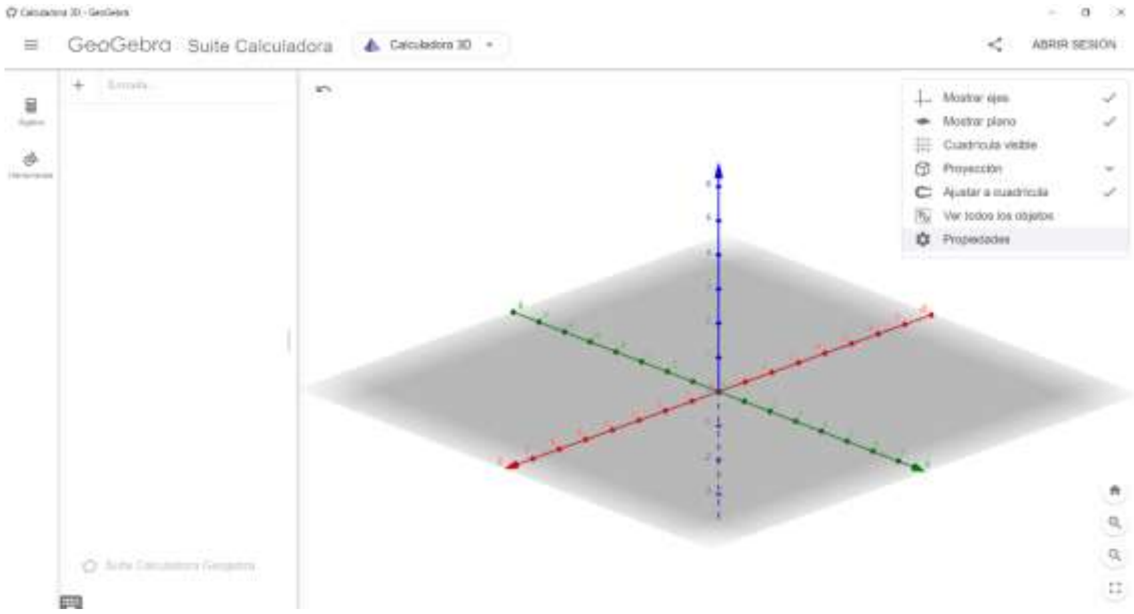
Paso 2. Se realizaron cambios en las propiedades del sistema de coordenadas tridimensional, de manera similar a como se cambiaron las propiedades del plano cartesiano en GeoGebra Clásico. Ver la figura B.8(i)-(viii).

Figura B.8(i)-(viii) Cambios realizados en el sistema de coordenadas tridimensional

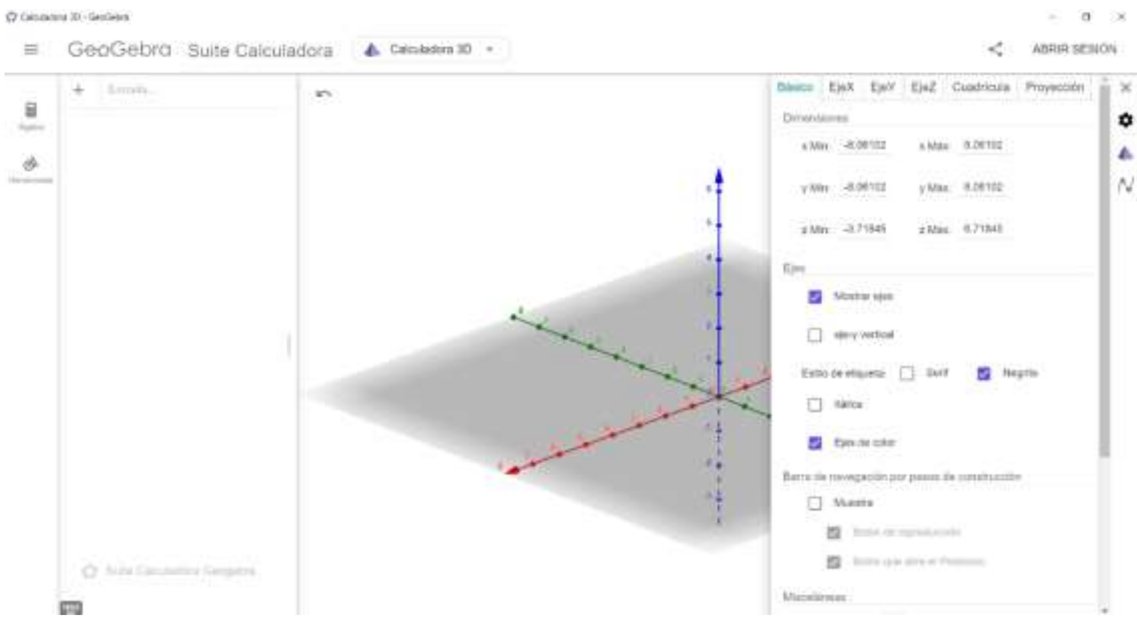
(i) Se dio clic en el ícono de *"Propiedades"*



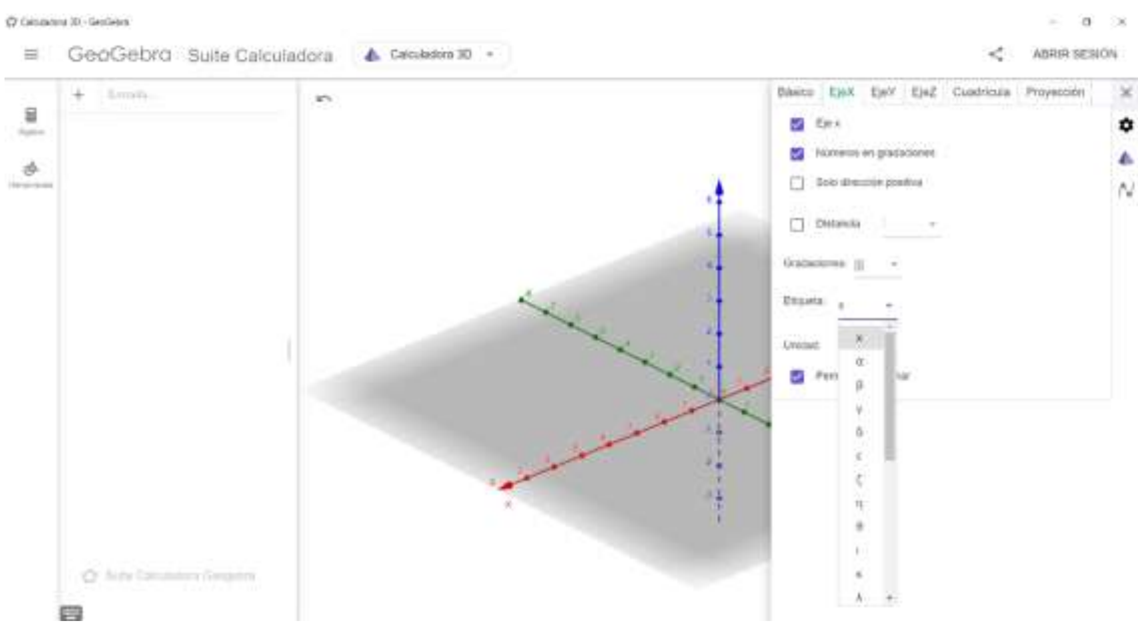
(ii) Se seleccionó la última opción, *"Propiedades"*, del menú que se desplegó



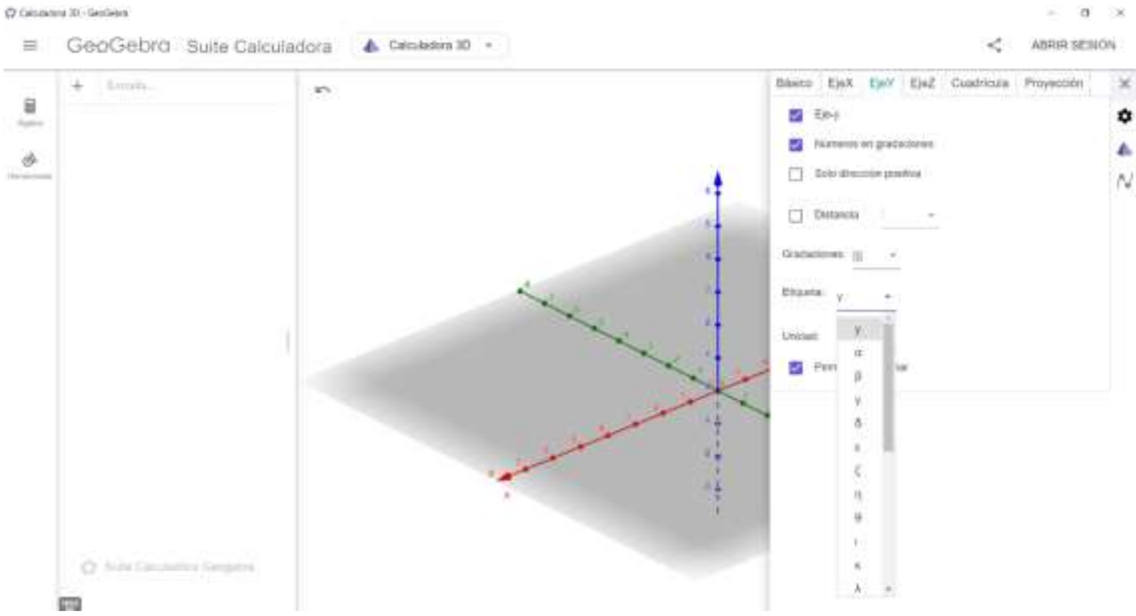
(iii) Se seleccionó *"Negrita"*, en *"Estilo de etiqueta"*, ingresando en la primera opción: *"Básico"*



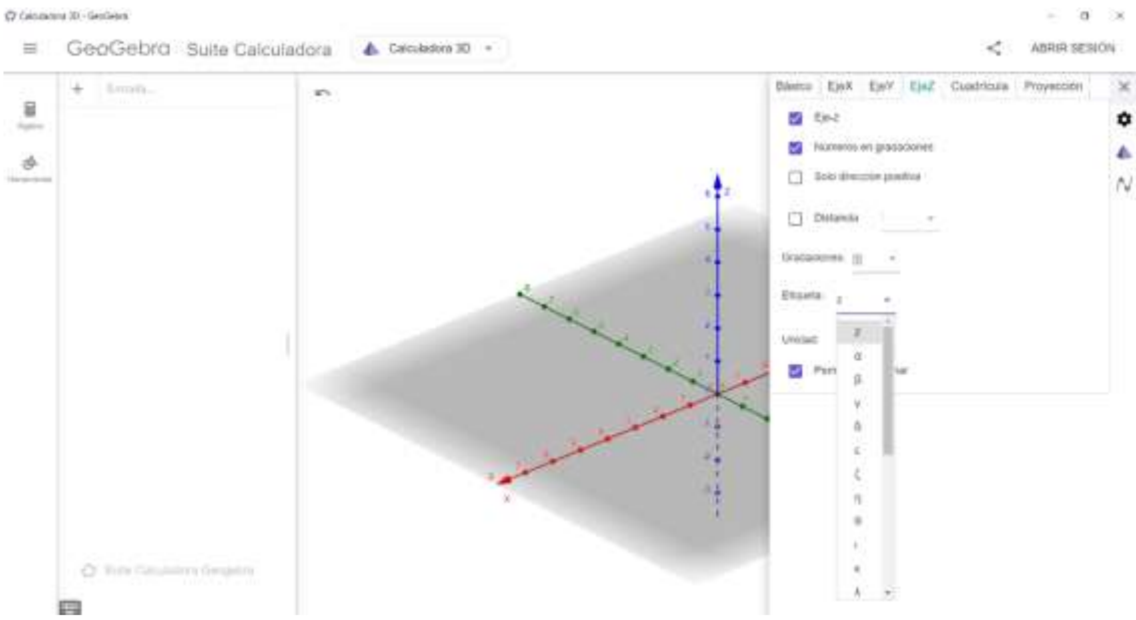
(iv) Se seleccionó la letra x, en *"Etiqueta"*, ingresando en la segunda opción: *"EjeX"*



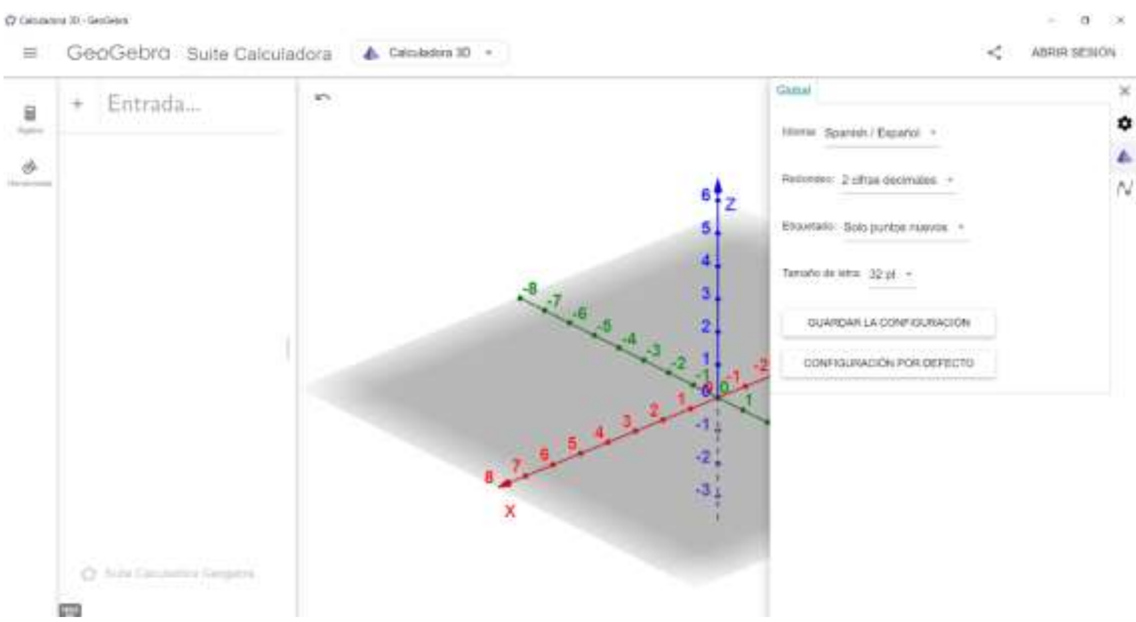
(v) Se seleccionó la letra y, en *"Etiqueta"*, ingresando en la tercera opción: *"EjeY"*



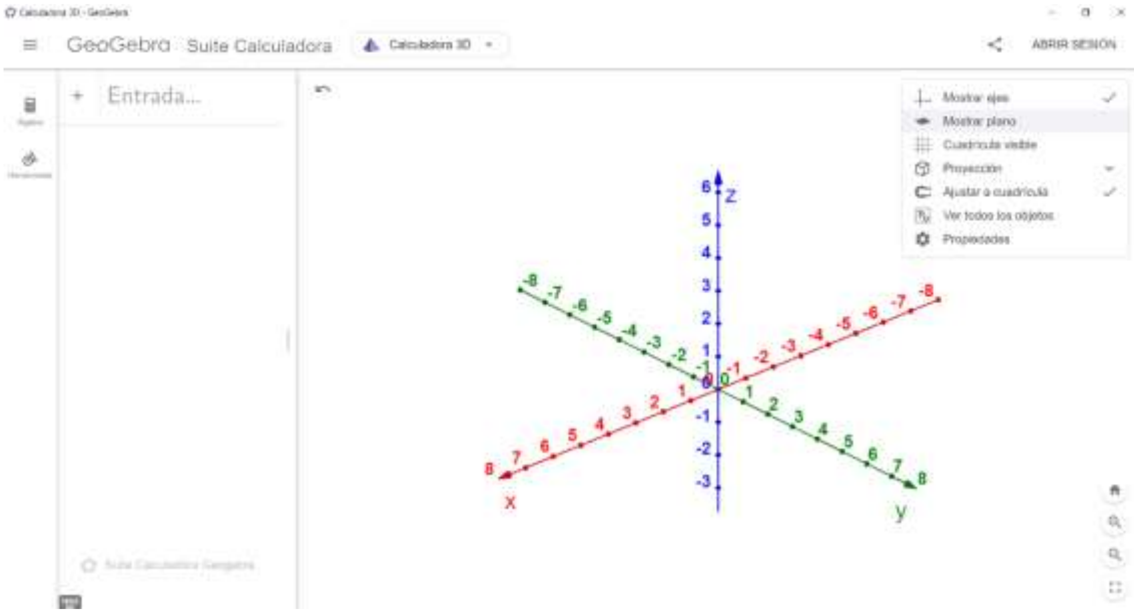
(vi) Se seleccionó la letra z, en *"Etiqueta"*, ingresando en la cuarta opción: *"EjeZ"*



(vii) Se seleccionó la opción 32 pt, en *"Tamaño de letra",* ingresando en *"Global"*



(viii) Se quitó la selección de *"Mostrar plano"*, en la segunda opción del menú original

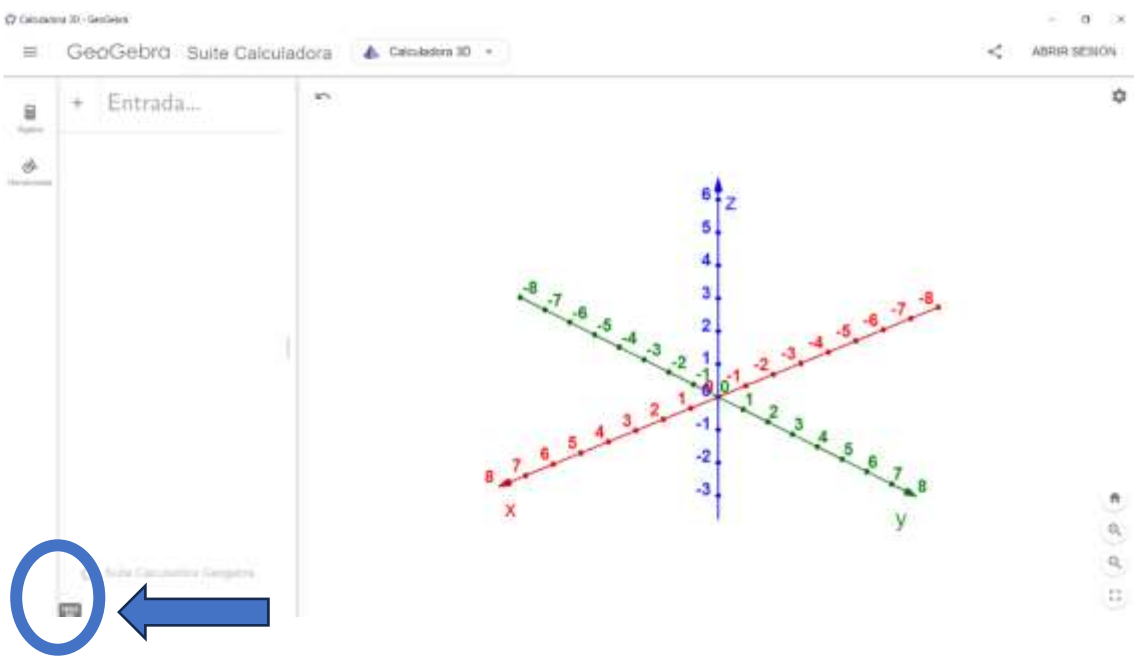


Fuente: Elaboración Propia

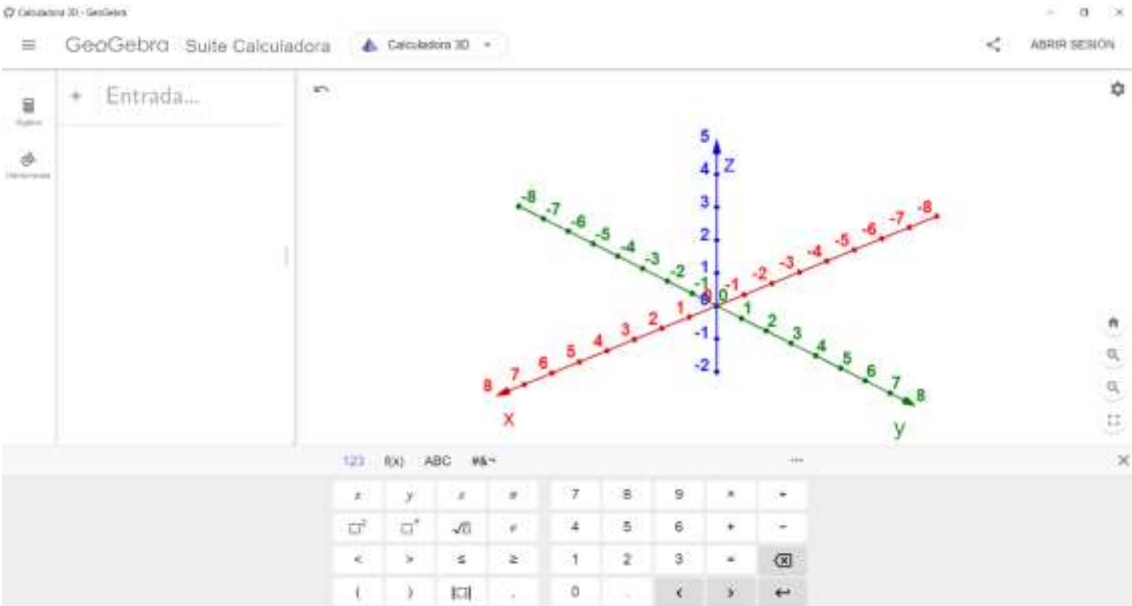
Paso 3. Se ingresó la ecuación $z = x^2 + y^2$, como *"Entrada"*, lo cual se puede realizar directamente con el teclado de la computadora o con el teclado de GeoGebra 3D, que está ubicado en la esquina inferior izquierda, de modo que se genera automáticamente la gráfica correspondiente. Ver la figura B.9(i)-(iii).

Figura B.9(i)-(iii) Gráfica de $z = x^2 + y^2$

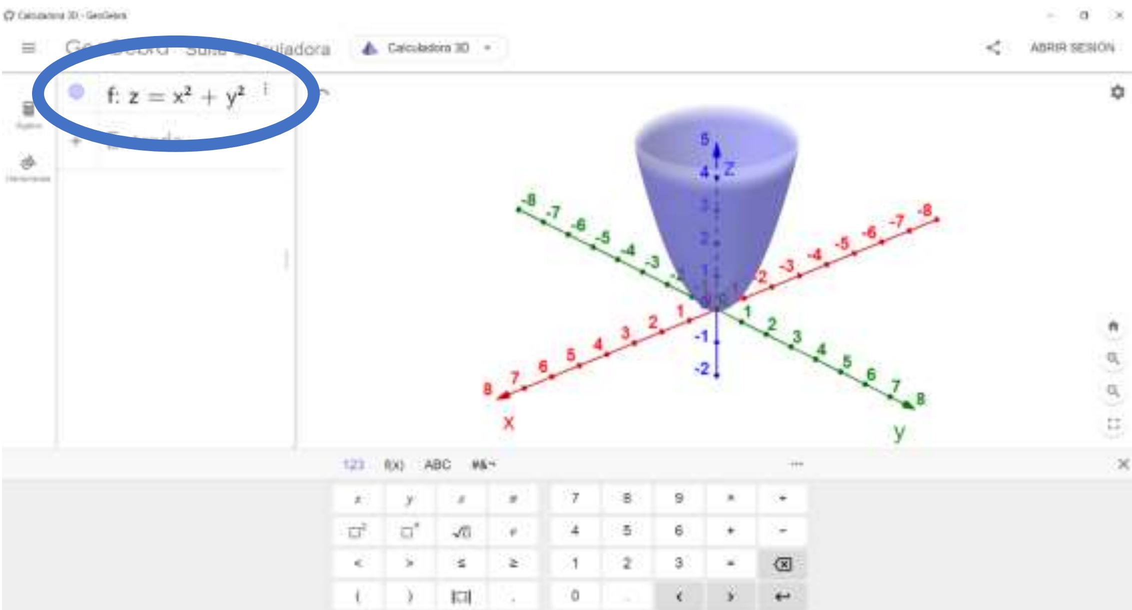
(i) Teclado de GeoGebra 3D minimizado



(ii) Teclado de GeoGebra 3D



(iii) Ingreso de la ecuación $z = x^2 + y^2$

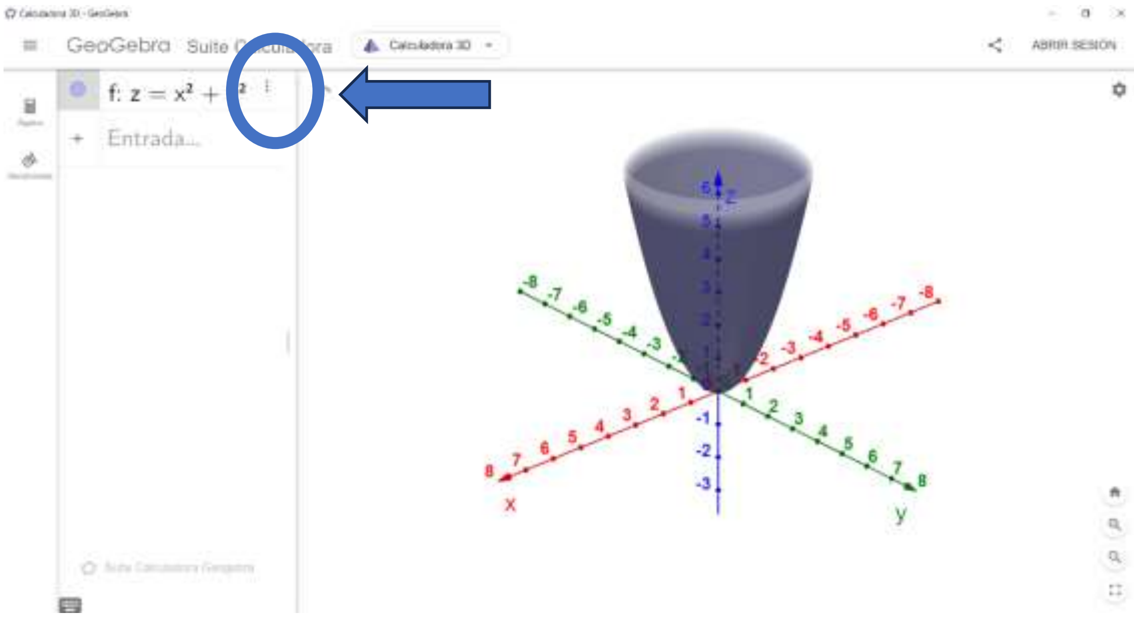


Fuente: Elaboración Propia

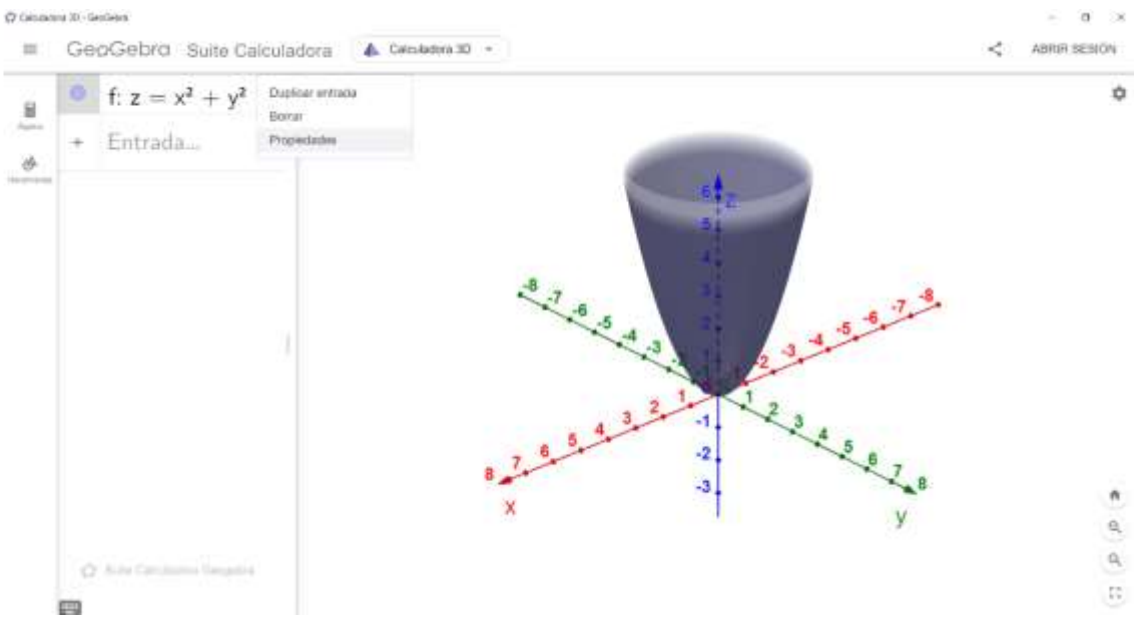
Paso 4. Se realizaron cambios en cuanto a las propiedades de la gráfica, como color y etiqueta, seleccionando la entrada y dando clic en los “tres puntos” que aparecen en ésta, como se muestra en la figura B.10(i)-(v).

Figura B.10 (i)-(v) Cambios realizados a las propiedades de la gráfica de $z = x^2 + y^2$

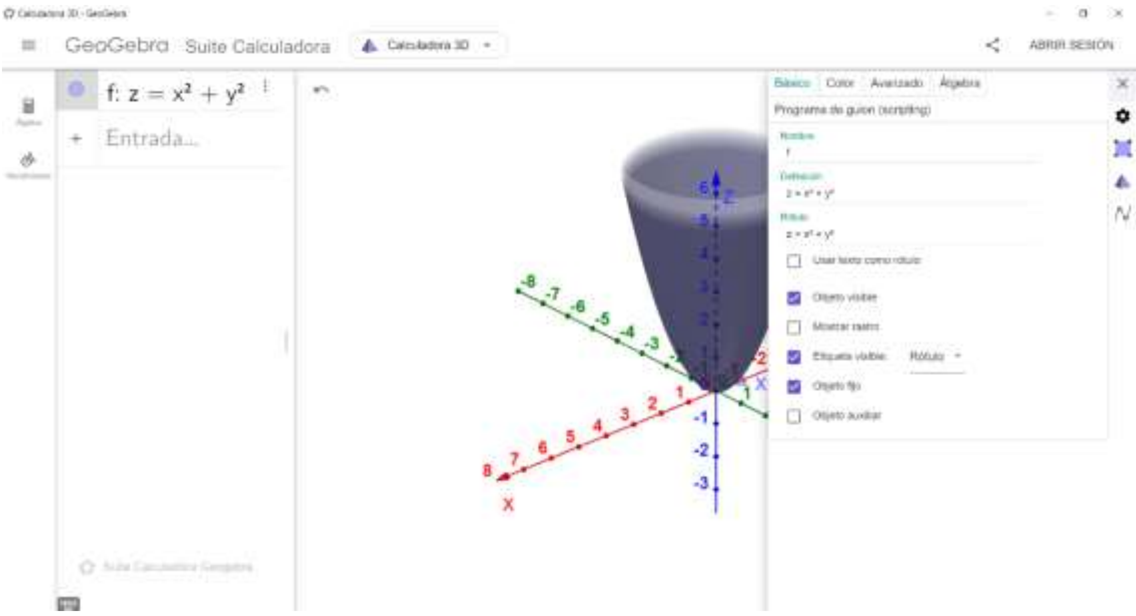
(i) Se dio clic en el ícono de los tres puntos que contiene las propiedades de la gráfica



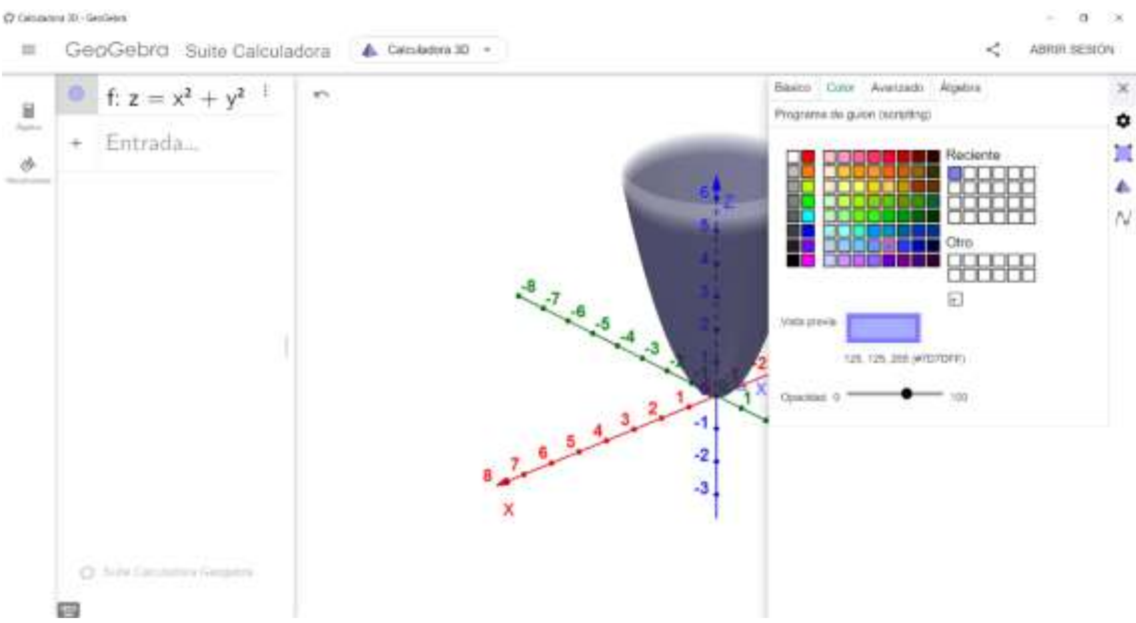
(ii) Se seleccionó la última opción, *“Propiedades”*, del menú que se desplegó



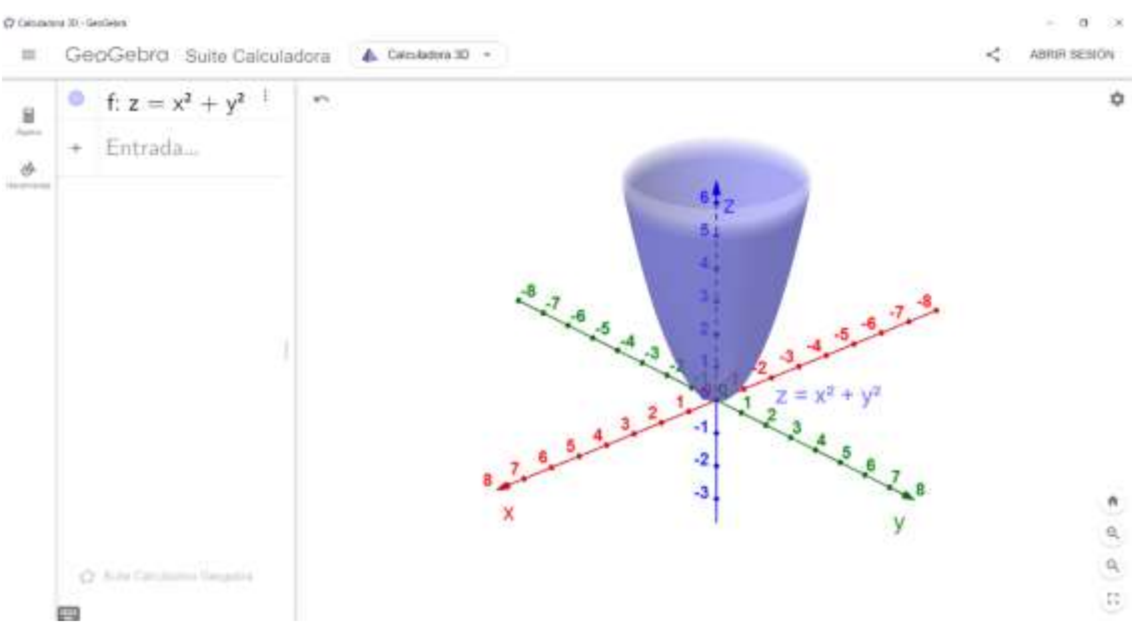
(iii) Se escribió $z = x^2 + y^2$, en *"Rótulo"*, ingresando en la primera opción: *"Básico"*



(iv) Se seleccionó el color, ingresando en la segunda opción: *"Color"*



(v) Gráfica de la ecuación $z = x^2 + y^2$

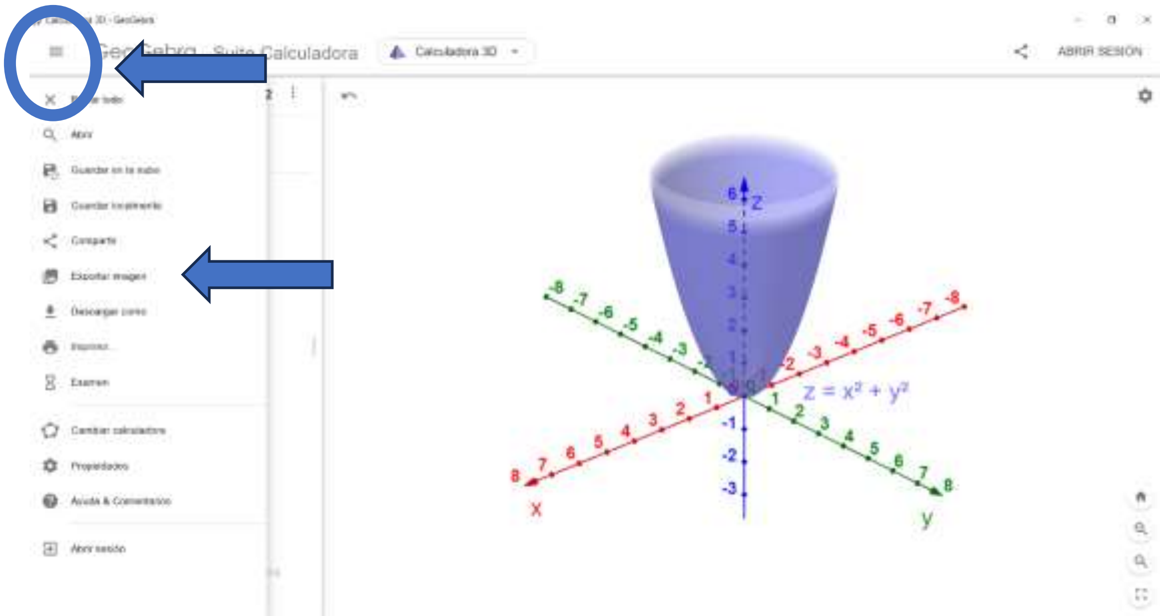


Fuente: Elaboración Propia

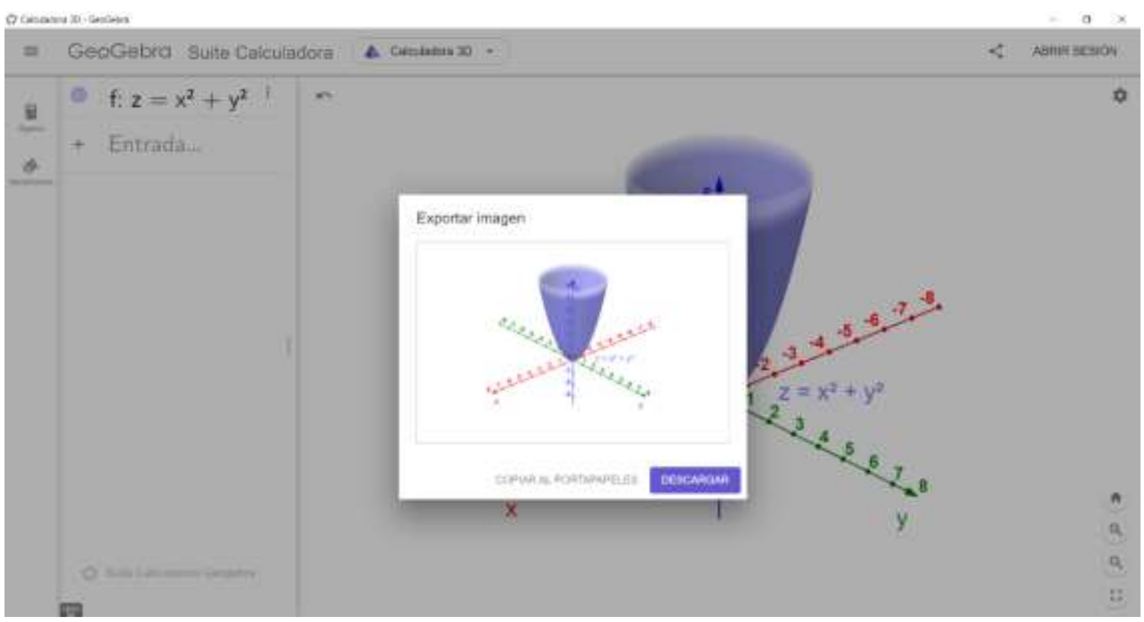
Paso 5. Se descargó la gráfica como imagen, dando clic en la esquina superior izquierda, como se indica en la figura B.11(i)-(ii).

Figura B.11(i)-(ii) Descarga de la gráfica como imagen

(i) Se dio clic en la esquina superior izquierda y se seleccionó *"Exportar imagen"*



(ii) Se dio clic en "DESCARGAR"

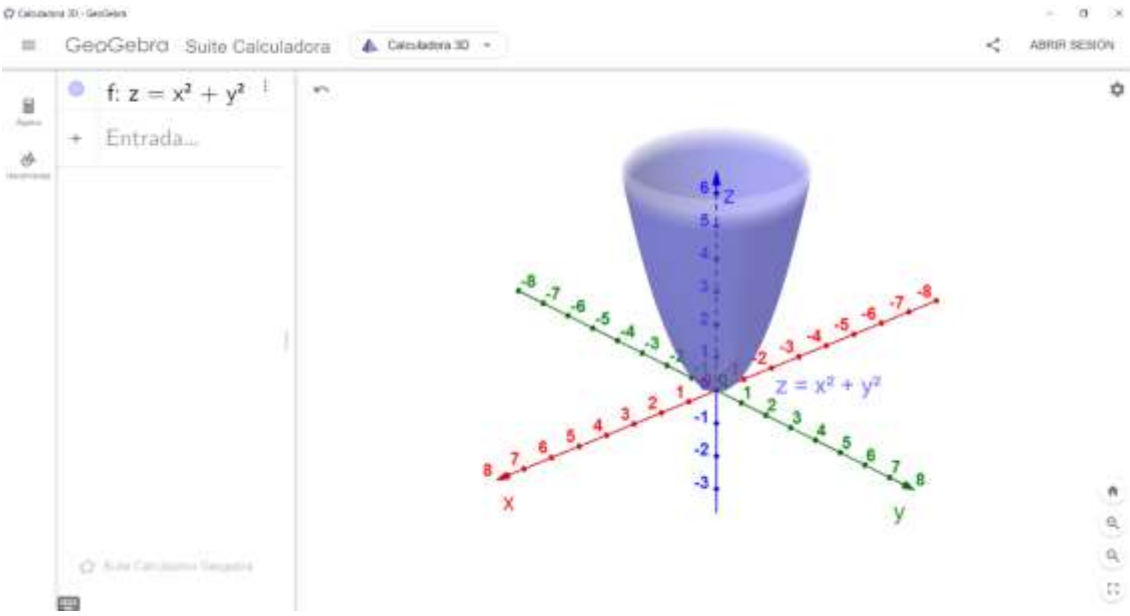


Fuente: Elaboración Propia

Finalmente, para generar la traza xz de la gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ en GeoGebra 3D, se procedió como se describe a continuación.

Paso 1. Se realizó la gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$, que es la misma gráfica de la ecuación $z = x^2 + y^2$. Ver la figura B.12.

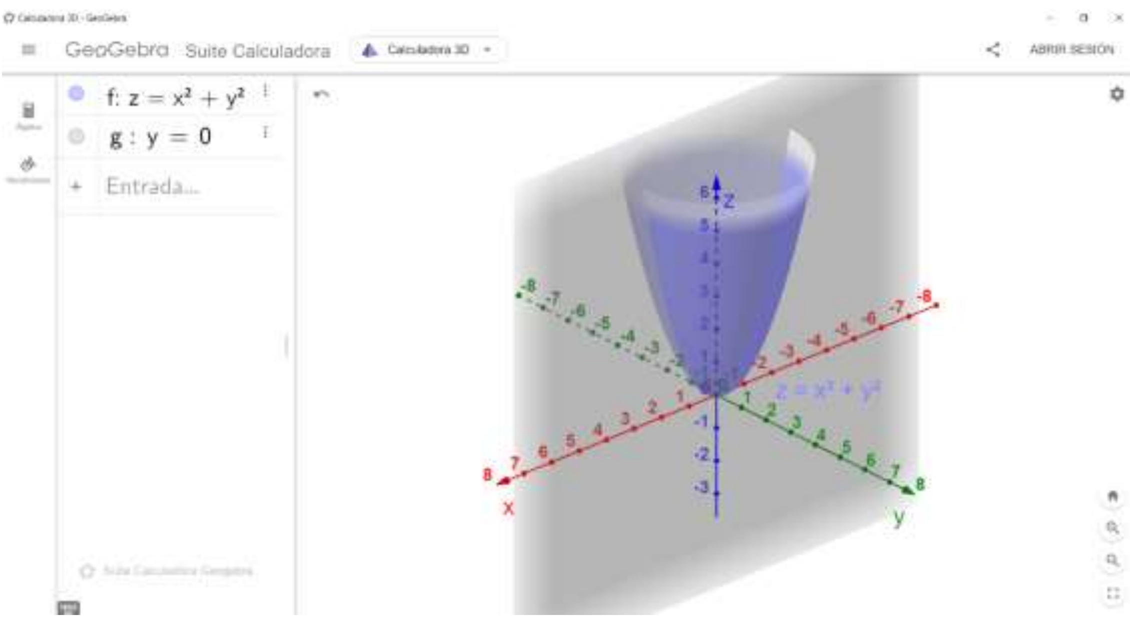
Figura B.12 Gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$



Fuente: Elaboración Propia

Paso 2. Se realizó la gráfica del plano xz, ingresando simplemente como entrada la ecuación del plano, que es $y = 0$. Ver la figura B.13.

Figura B.13 Gráfica de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ y gráfica del plano xz

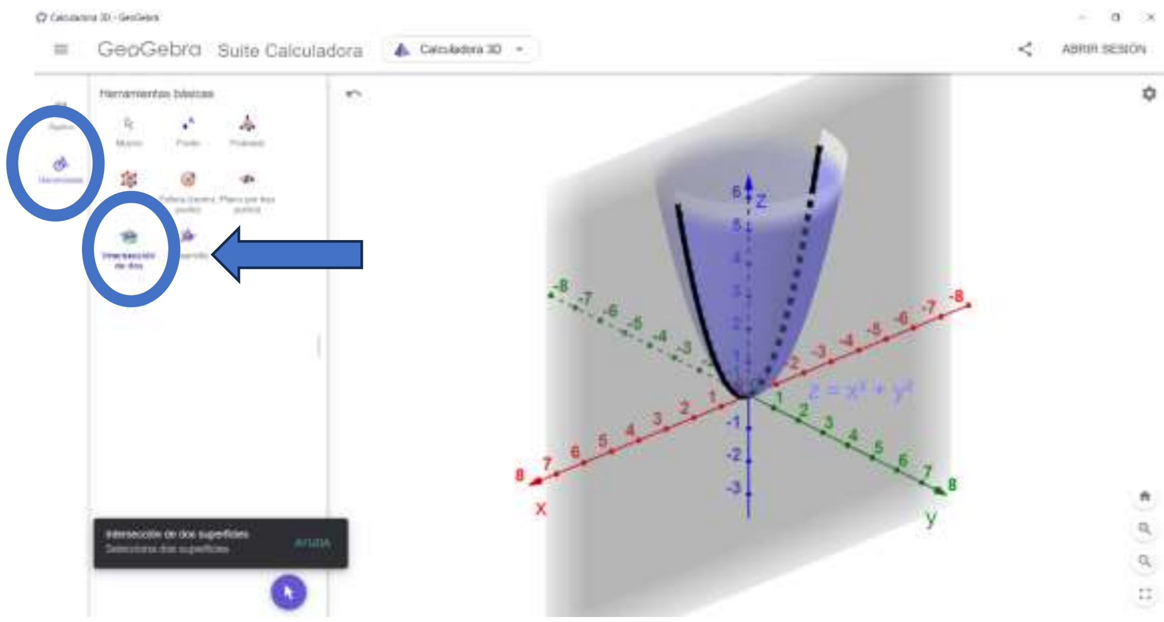


Fuente: Elaboración Propia

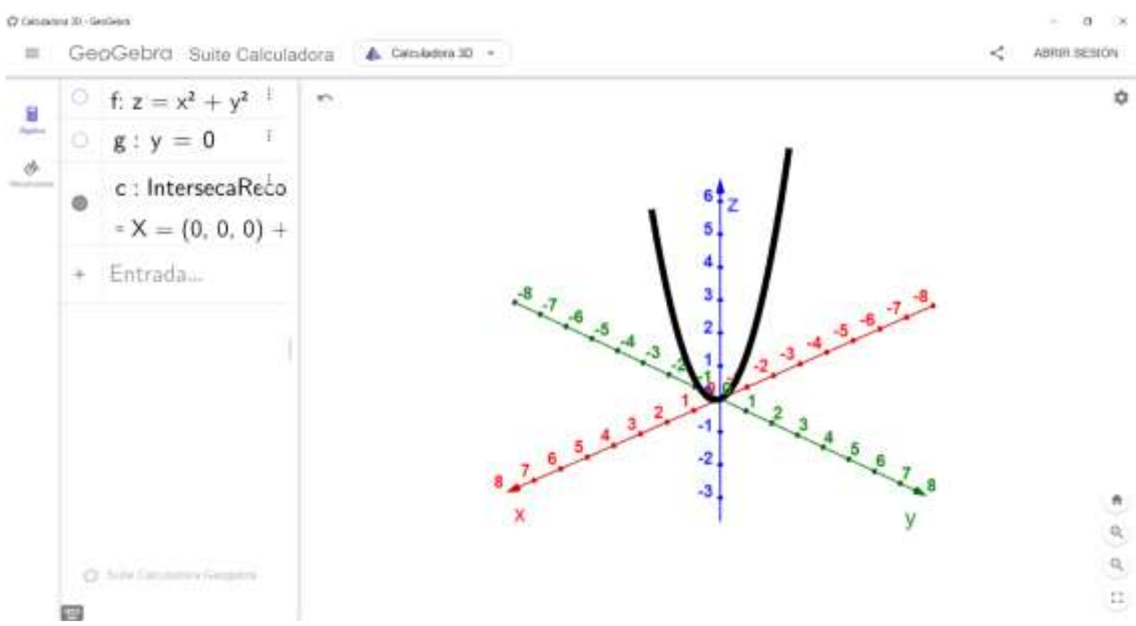
Paso 3. Se dio clic en la opción *"Herramientas"*, ubicada en la parte superior izquierda y, posteriormente, se dio clic en la opción *"Intersección de dos"* que consiste en seleccionar las dos superficies a interceptar que, en este caso, son la gráfica de la ecuación $z = x^2 + y^2$ y la gráfica del plano xz, dando como resultado la traza xz que es una parábola en dicho plano. Nótese que, para que sólo quede visible la traza, las demás gráficas se ocultan dando clic sobre sus respectivas entradas. Ver la figura B.14(i)-(ii).

Figura B.14(i)-(ii) Intersección de la gráfica de $z = x^2 + y^2$ y del plano xz

(i) Se dio clic en *"Herramientas"*, luego en *"Intersección de dos"*, y se seleccionaron tanto la gráfica de $z = x^2 + y^2$ como la del plano xz



(ii) Traza xz de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$



Fuente: Elaboración Propia

Para más información, se puede consultar el manual de GeoGebra disponible en https://wiki.geogebra.org/es/Manual

Apéndice C. Respuestas de los Ejercicios Propuestos

Capítulo 1. Funciones de Varias Variables

1. El dominio de $f(x,y) = 6x^4 - 3x^2y + y - 5$ es $Domf = \mathbb{R}^2$ y es una función polinomial.

2. El dominio de $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$ es $Domf = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y,z) \neq (0,0,0)\}$ y es una función racional.

3. El dominio de $f(x,y) = (xseny, y\cos x)$ es $Domf = \mathbb{R}^2$ y no es una función polinomial, ni racional, ni definida a trozos.

4. El dominio de $f(x,y,z) = \frac{e^{xy}-z}{x^2+y^2+1}$ es $Domf = \mathbb{R}^3$ y no es una función polinomial, ni racional, ni definida a trozos.

5. El dominio de $f(x,y) = ln(xy-1)$ es $Domf = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | xy - 1 > 0\}$ y no es una función polinomial, ni racional, ni definida a trozos.

6. El dominio de $f(x,y) = \frac{y^4-x^4}{x^2+y^2}$ es $Domf = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) \neq (0,0)\}$ y es una función racional.

7. El dominio de $f(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{x}-2}$ es $Domf = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0,\ x \neq 4\}$ y no es una función polinomial, ni racional, ni definida a trozos.

8. El dominio de $f(x,y,z) = \left(xy, \frac{1}{xz}, \sqrt{x^2+y^2+z^2}, z-y\right)$ está dado por $Domf = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | xz \neq 0\}$ y no es una función polinomial, ni racional, ni definida a trozos.

9. El dominio de $f(x,y) = \frac{x^9y}{(x^6+y^2)^2}$ es $Domf = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) \neq (0,0)\}$ y es una función racional.

10. El dominio de $f(x,y,z) = \sqrt{5x^2 - 3y^2 + z^2 - 49}$ está dado por $Domf = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 5x^2 - 3y^2 + z^2 - 49 \geq 0\}$ y no es una función polinomial, ni racional, ni definida a trozos.

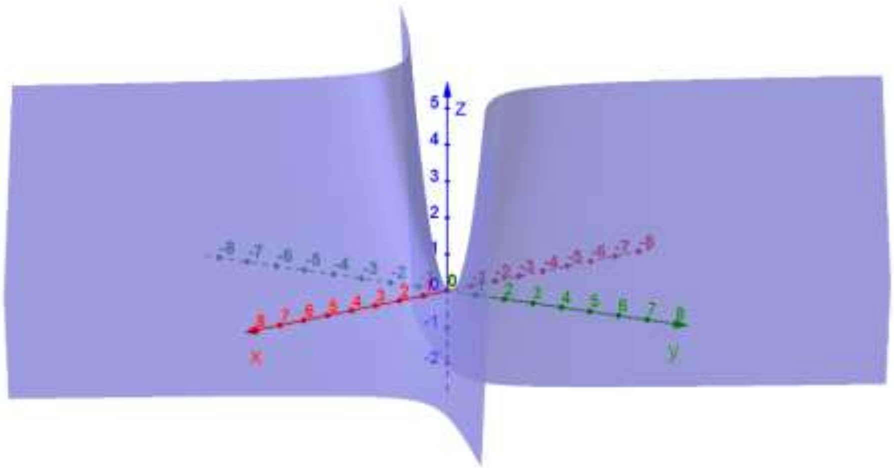
11. El dominio de $f(x,y,z) = \frac{sen(xy)+\sqrt{z}}{e^z-1}$ es $Domf = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z > 0\}$ y no es una función polinomial, ni racional, ni definida a trozos.

12. El dominio de $f(x,y) = \frac{1-xy^2+x^2}{\sqrt{36-x^2-y^2}}$ es $Domf = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 36 - x^2 - y^2 > 0\}$ y no es una función polinomial, ni racional, ni definida a trozos.

13. El dominio de $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} & si \quad (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & si \quad (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$ es $Domf = \mathbb{R}^3$ y es una función definida a trozos.

14. (a) La gráfica de la función $f(x,y) = y^2 - x^2$ se muestra en la figura C.1.

Figura C.1 Gráfica de $f(x,y) = y^2 - x^2$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

(b) Las trazas se establecen en la tabla C.1.

Tabla C.1 Trazas de $f(x,y) = y^2 - x^2$

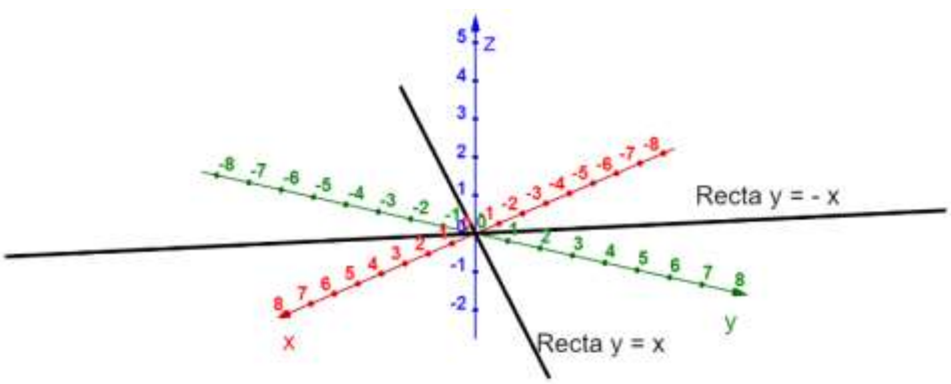
Traza	Ecuación de la traza	Descripción de la traza
xy $(z = 0)$	$y^2 - x^2 = 0$	Dos rectas, una de ecuación $y = x$ y la otra de ecuación $y = -x$
Paralela a xy $(z = 1)$	$y^2 - x^2 = 1$	Hipérbola con centro en el origen y eje transversal paralelo al eje y
Paralela a xy $(z = -1)$	$x^2 - y^2 = 1$	Hipérbola con centro en el origen y eje transversal paralelo al eje x
xz $(y = 0)$	$z = -x^2$	Parábola en el plano xz que abre hacia abajo y con vértice en el origen
yz $(x = 0)$	$z = y^2$	Parábola en el plano yz que abre hacia arriba y con vértice en el origen

Fuente: Elaboración Propia

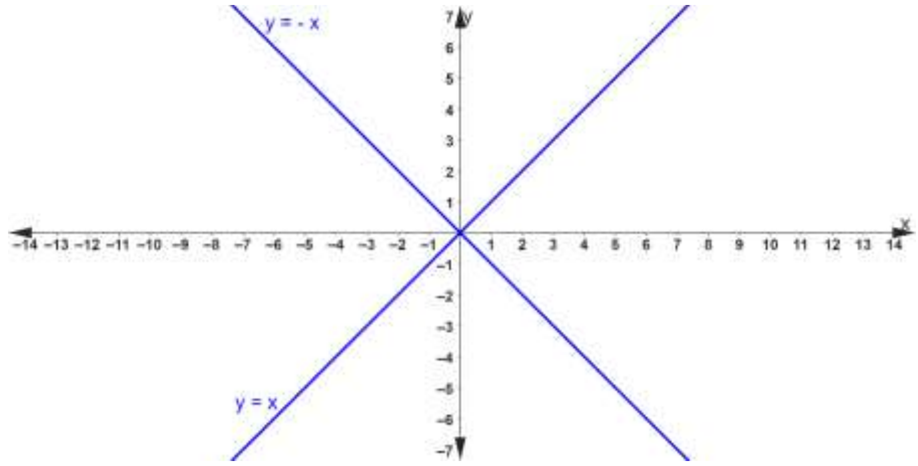
(c) Las gráficas de las trazas se muestran en la figura C.2(i)-(x).

Figura C.2(i)-(x) Gráficas de las trazas de $f(x,y) = y^2 - x^2$

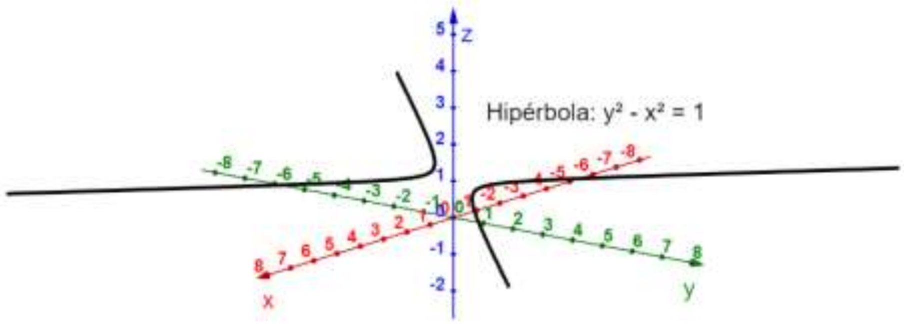
(i) Traza xy en el sistema de coordenadas tridimensional



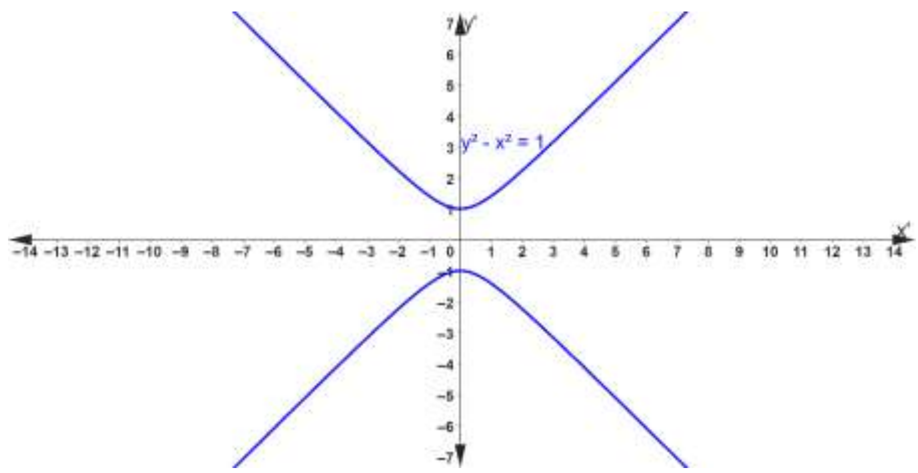
(ii) Traza xy en el plano xy



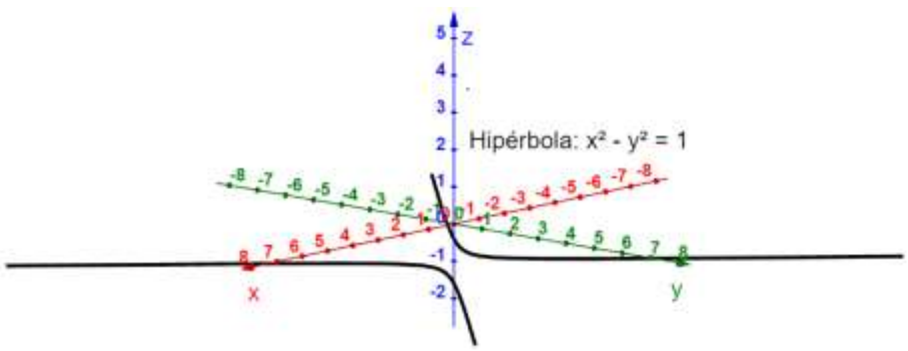
(iii) Traza con el plano $z = 1$ en el sistema de coordenadas tridimensional



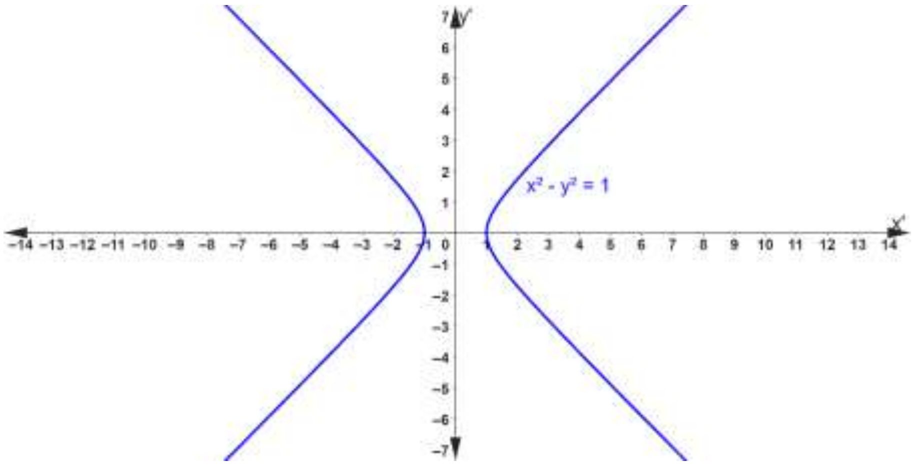
(iv) Traza con el plano $z = 1$ en el plano $z = 1$



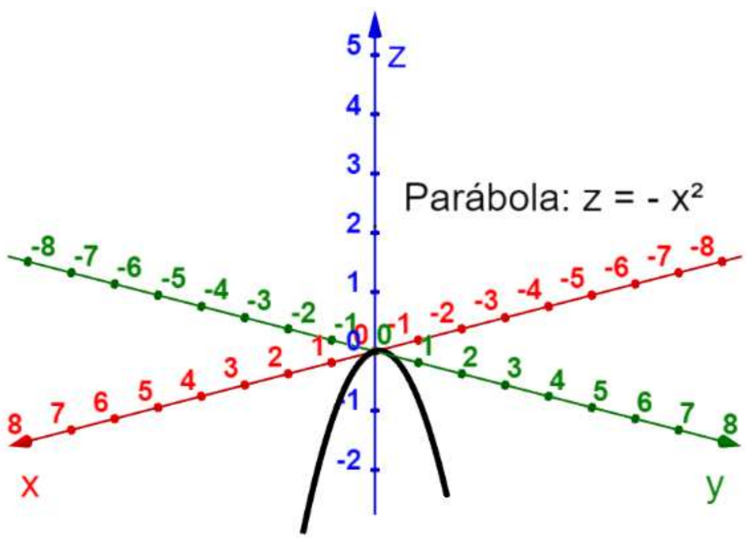
(v) Traza con el plano $z = -1$ en el sistema de coordenada tridimensional



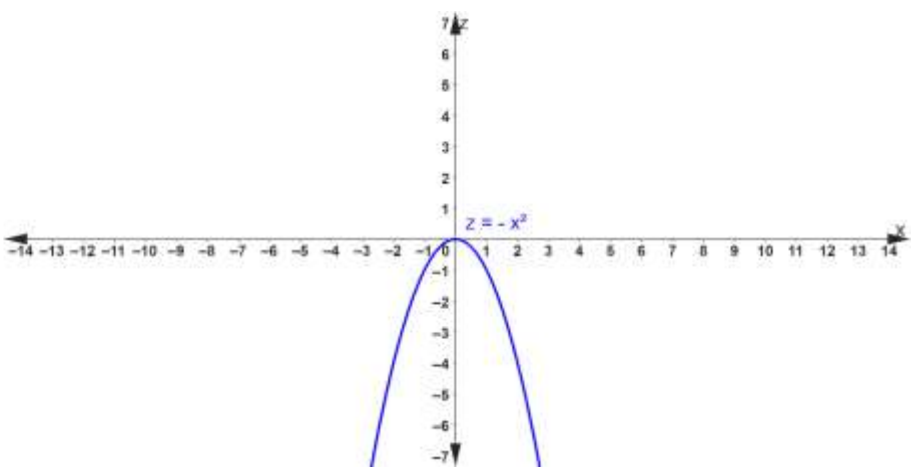
(vi) Traza con el plano $z = -1$ en el plano $z = -1$



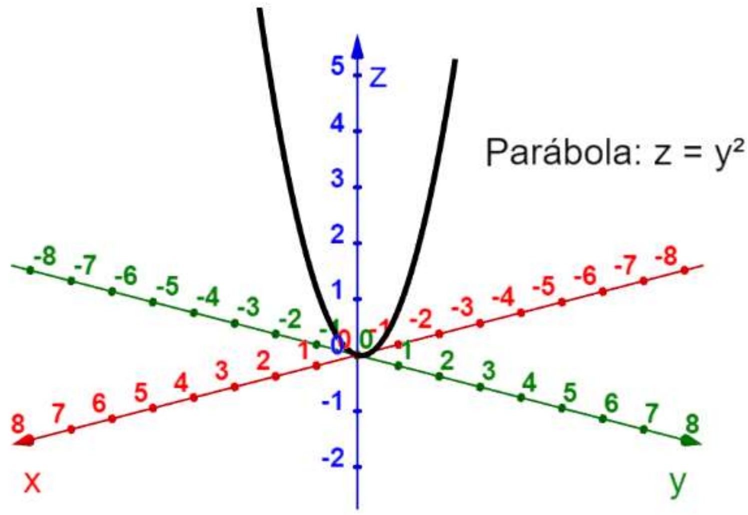
(vii) Traza xz en el sistema de coordenada tridimensional



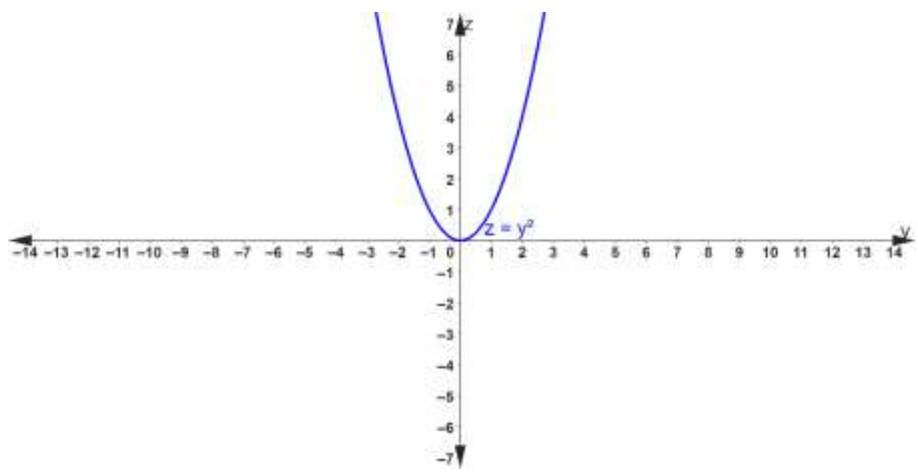
(viii) Traza xz en el plano xz



(ix) Traza yz en el sistema de coordenadas tridimensional



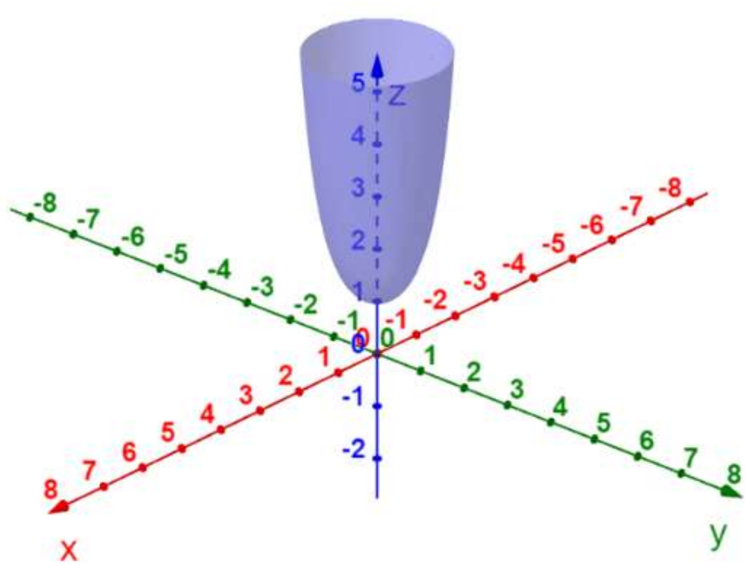
(x) Traza yz en el plano yz



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D y GeoGebra Clásico

15. (a) La gráfica de la función $g(x, y) = \exp(x^2 + y^2)$ se muestra en la figura C.3.

Figura C.3 Gráfica de $g(x, y) = \exp(x^2 + y^2)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

(b) Las trazas se establecen en la tabla C.2.

Tabla C.2 Trazas de $g(x, y) = \exp(x^2 + y^2)$

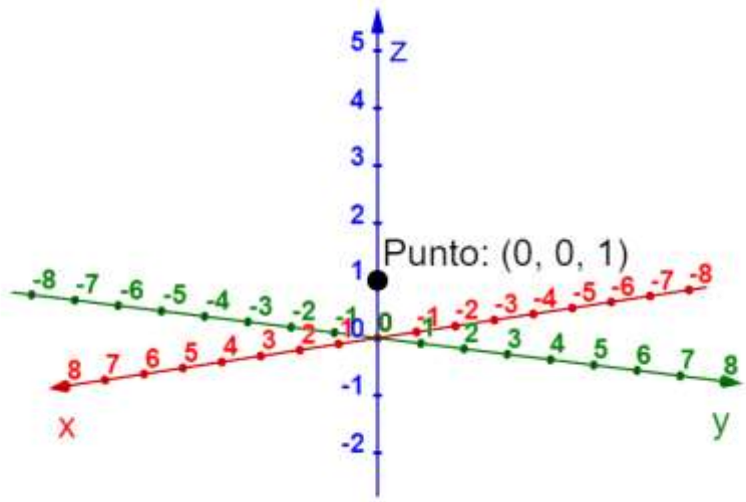
Traza	Ecuación de la traza	Descripción de la traza
xy ($z = 0$)	$e^{x^2+y^2} = 0$	No existe la traza, pues $e^{x^2+y^2} > 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
Paralela a xy ($z = 1$)	$e^{x^2+y^2} = 1$	Origen $(0,0)$ en el plano $z = 1$
Paralela a xy ($z = 4$)	$e^{x^2+y^2} = 4$	Circunferencia en el plano $z = 4$ de ecuación $x^2 + y^2 = ln4$
xz ($y = 0$)	$z = e^{x^2}$	Curva exponencial en el plano xz
yz ($x = 0$)	$z = e^{y^2}$	Curva exponencial en el plano yz

Fuente: Elaboración Propia

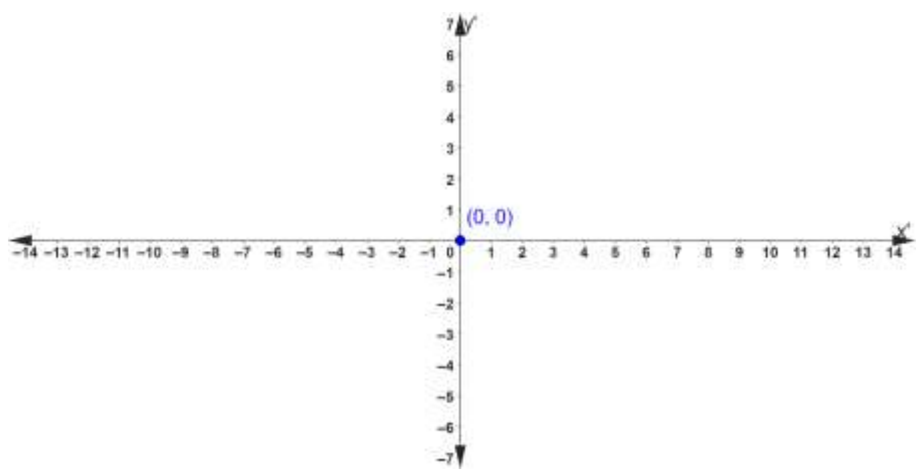
(c) Las gráficas de las trazas se muestran en la figura C.4(i)-(viii).

Figura C.4(i)-(viii) Gráficas de las trazas de $g(x, y) = \exp(x^2 + y^2)$

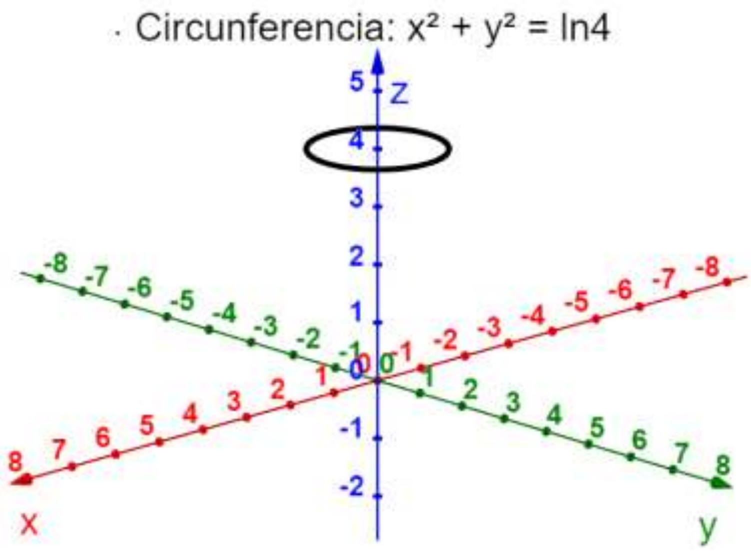
(i) Traza con el plano $z = 1$ en el sistema de coordenadas tridimensional



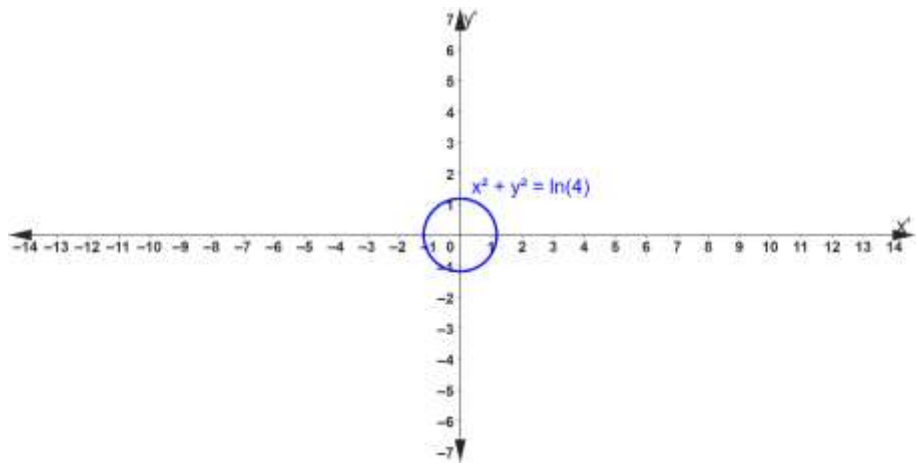
(ii) Traza con el plano $z = 1$ en el plano $z = 1$



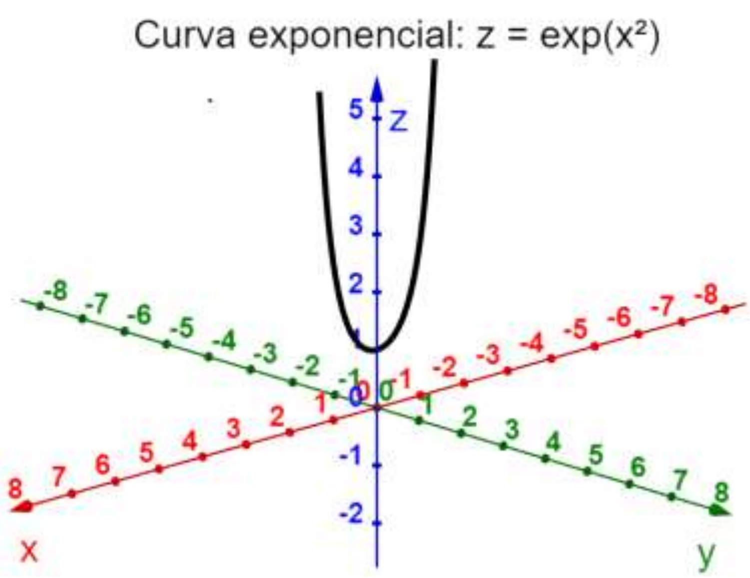
(iii) Traza con el plano $z = 4$ en el sistema de coordenadas tridimensional



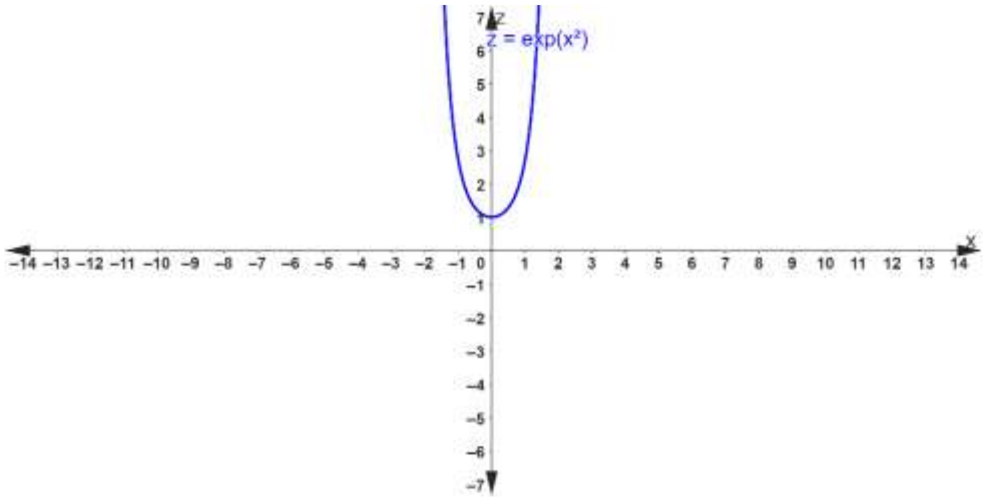
(iv) Traza con el plano $z = 4$ en el plano $z = 4$



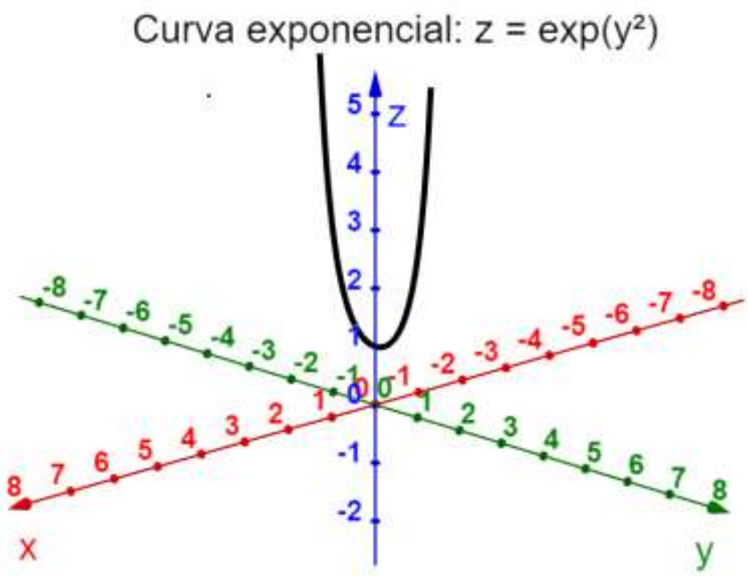
(v) Traza xz en el sistema de coordenadas tridimensional



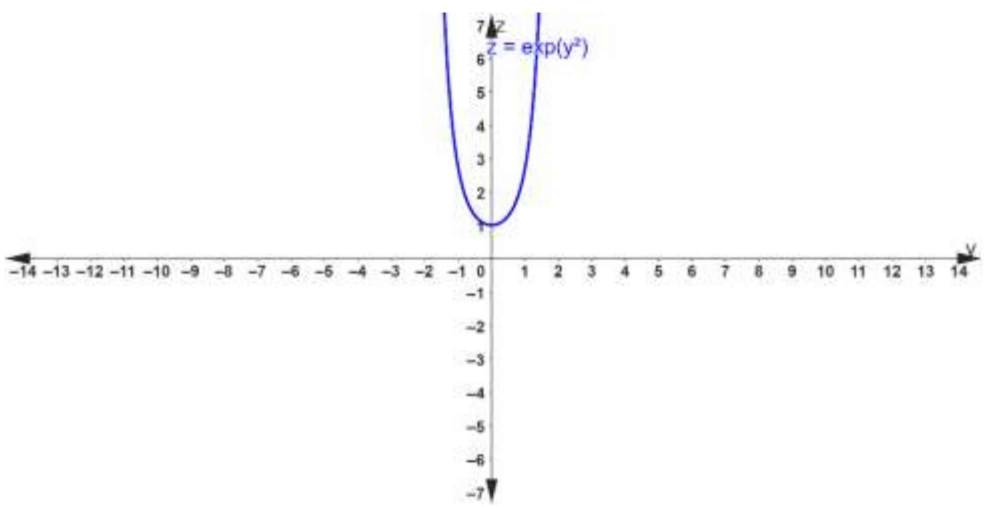
(vi) Traza xz en el plano xz



(vii) Traza yz en el sistema de coordenadas tridimensional



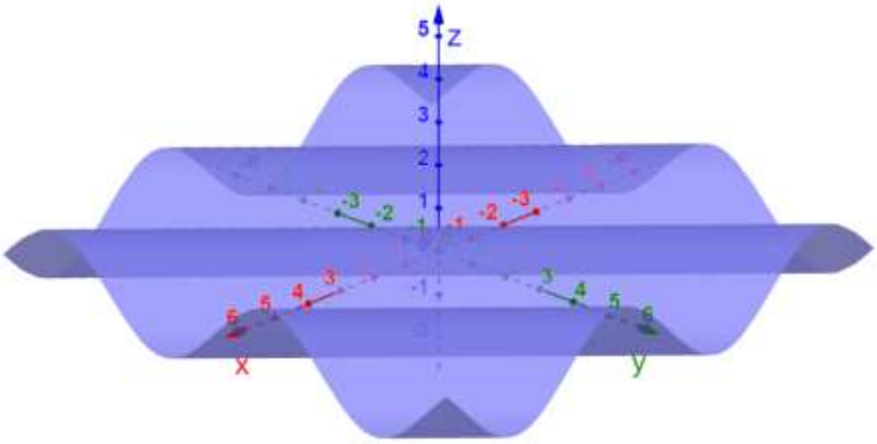
(viii) Traza yz en el plano yz



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D y GeoGebra Clásico

16. (a) La gráfica de la función $h(x,y) = sen(x + y)$ se muestra en la figura C.5.

Figura C.5 Gráfica de $h(x,y) = sen(x + y)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

(b) Las trazas se establecen en la tabla C.3.

Tabla C.3 Trazas de $h(x,y) = sen(x + y)$

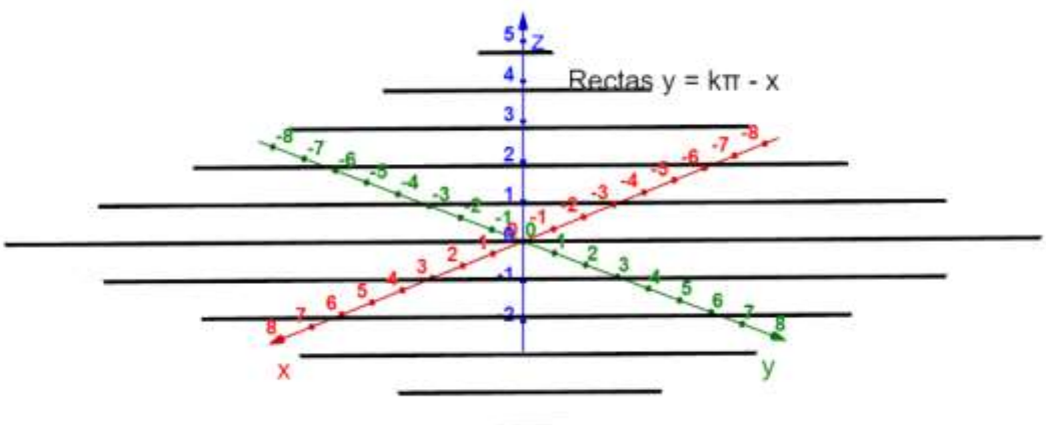
Traza	Ecuación de la traza	Descripción de la traza
xy ($z = 0$)	$sen(x + y) = 0$	Rectas de ecuación $y = k\pi - x$, donde k es un entero
xz ($y = 0$)	$z = senx$	Curva senoidal en el plano xz
yz ($x = 0$)	$z = seny$	Curva senoidal en el plano yz

Fuente: Elaboración Propia

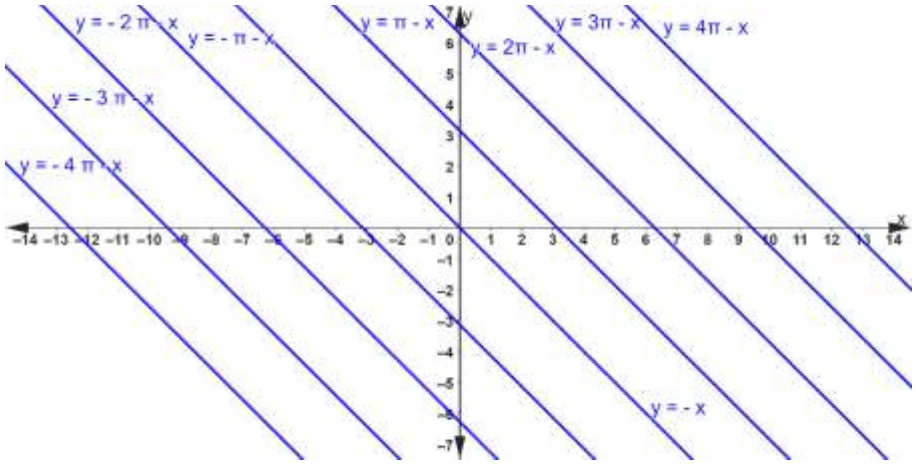
(c) Las gráficas de las trazas se muestran en la figura C.6(i)-(vi).

Figura C.6(i)-(vi) Gráficas de las trazas de $h(x,y) = sen(x + y)$

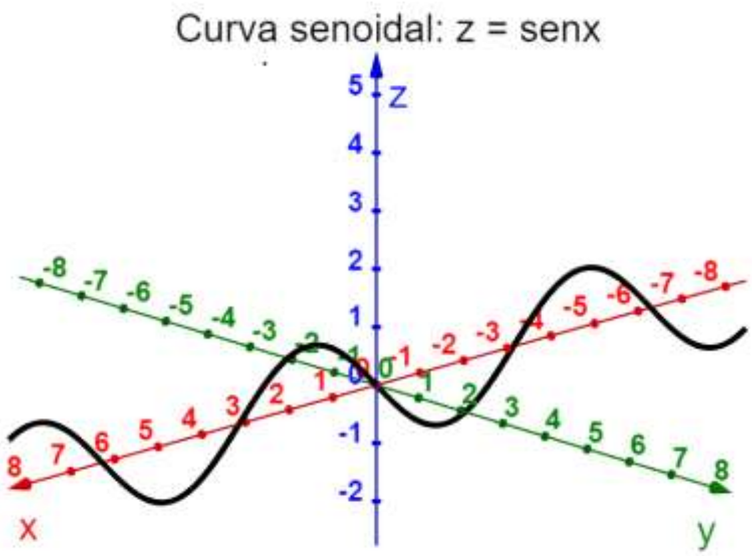
(i) Traza xy en el sistema de coordenadas tridimensional



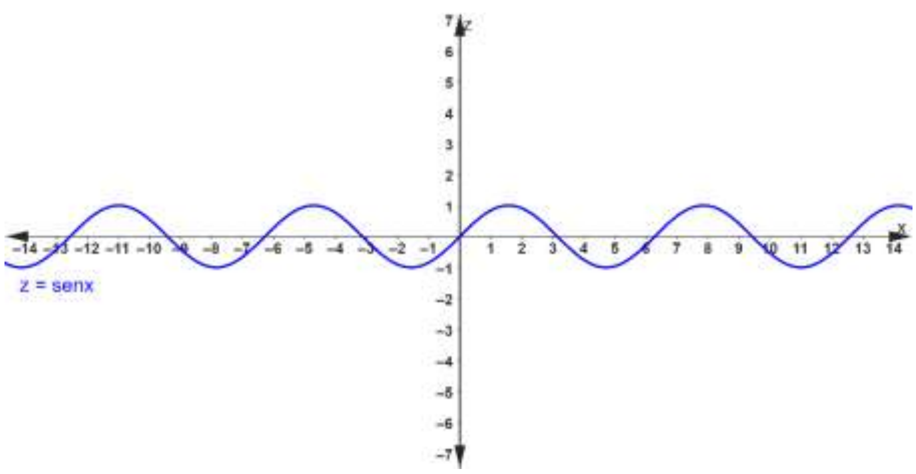
(ii) Traza xy en el plano xy



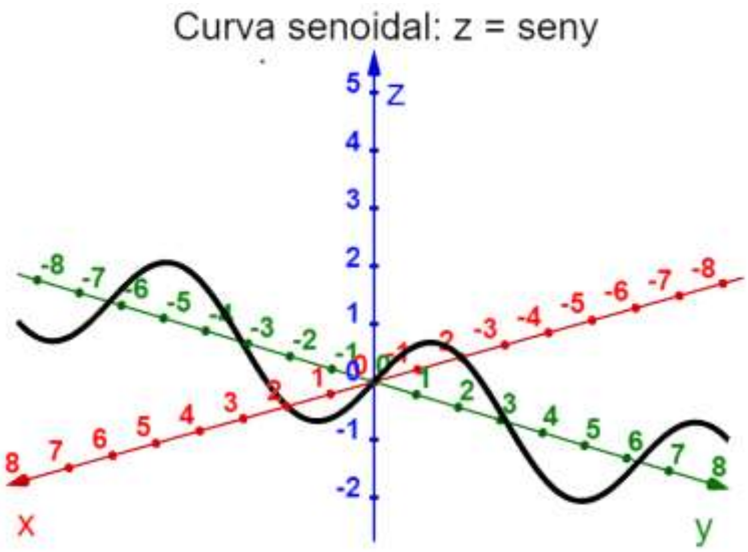
(iii) Traza xz en el sistema de coordenadas tridimensional



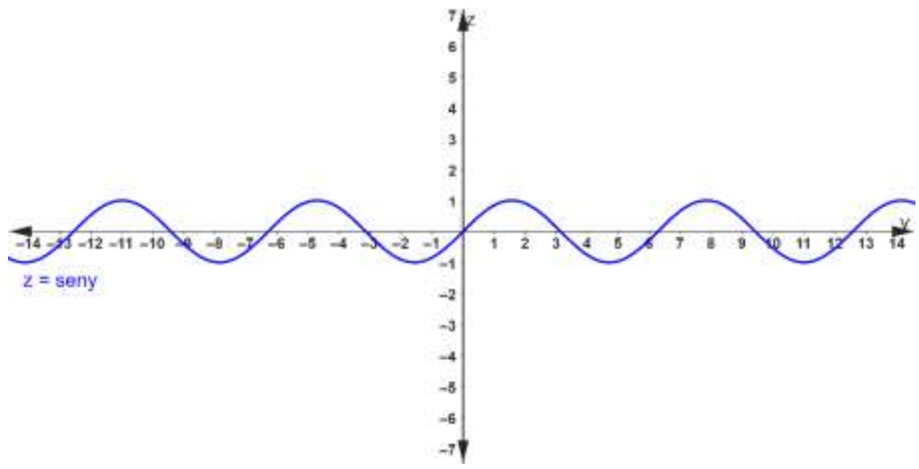
(iv) Traza xz en el plano xz



(v) Traza yz en el sistema de coordenadas tridimensional



(vi) Traza yz en el plano yz



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D y GeoGebra Clásico

17. Si $f(t) = \ln t$ y $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 5$, entonces:

(a) $(f \circ g)(x, y, z) = ln(x^2 + y^2 + z^2 + 5)$
(b) $Dom(f \circ g) = \mathbb{R}^3$

18. Si $g(t) = cost$ y $f(x, y) = \frac{1}{x-3y}$, entonces:

(a) $(g \circ f)(x, y) = cos\left(\frac{1}{x-3y}\right)$
(b) $Dom(g \circ f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x - 3y \neq 0\}$

19. $V(x, y, z) = xyz$ representa el volumen de un paralelepípedo rectangular como una función de sus aristas, donde x es su ancho, y su largo y z su altura, medidos en unidades de longitud. Además, $DomV = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x > 0, y > 0, z > 0\}$ es el dominio de V.

20. $A(h, r) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ representa el área de un cilindro circular recto como una función de su altura h y del radio r. Además, $DomA = \{(h, r) \in \mathbb{R}^2 | h > 0, r > 0\}$ es el dominio de A.

Capítulo 2. Límites y Continuidad

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}$ existe y es 4.

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{2x^2-xy-3y^2}{5x^2+7xy+2y^2}$ existe y es $\frac{5}{3}$.

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2-xy+y^2}$ no existe.

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-2)} \frac{x(x-3)}{y+2}$ no existe.

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^3-y^3}{x-y}$ existe y es 12.

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(9,-1)} \frac{\sqrt{x}+3y}{x-9y^2}$ existe y es $\frac{1}{6}$.

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$ no existe.

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+3x^2+3y^2+y^4}{x^2+y^2}$ existe y es 3.

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^3+2y^3}$ no existe.

10. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^6+y^6}$ no existe.

11. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x\neq y\} = Domf$ es el conjunto más grande donde es continua la función $f(x,y) = \frac{exp(x^2)}{x-y}$.

12. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | y\neq -1,1\} = Domf$ es el conjunto más grande donde es continua la función $f(x,y) = cos\left(\frac{x}{y^2-1}\right)$.

13. $\mathbb{R}^2 = Domf$ es el conjunto más grande donde es continua la función $f(x,y) = \frac{x^3+y}{x^2+1}$.

14. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 1-x^2-y^2>0\} = Domf$ es el conjunto más grande donde es continua la función $f(x,y) = ln\left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)$.

15. $\mathbb{R}^2 = Domf$ es el conjunto más grande donde es continua la función a trozos $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

16. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | (x,y)\neq(0,0)\} \neq Domf$ es el conjunto más grande donde es continua la función a trozos $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

17. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 25-x^2-y^2>0\} = Domf$ es el conjunto más grande donde es continua la función $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$.

18. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - 2y^2 + 5 > 0\} = Domf$ es el conjunto más grande donde es continua la función $f(x,y) = \frac{x-y}{\sqrt{x^2-2y^2+5}}$.

19. $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x+y}$ tiene una discontinuidad removible en $(0,0)$.

20. $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+5xy+3y^2}$ tiene una discontinuidad esencial en $(0,0)$.

21. $f(x,y) = \frac{6xy^2-2y^3}{x^2+y^2}$ tiene una discontinuidad removible en $(0,0)$.

22. $f(x,y) = \frac{2x^4y}{x^6+y^3}$ tiene una discontinuidad esencial en $(0,0)$.

Capítulo 3. Derivadas Parciales y Diferenciabilidad

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 5x^4y^3 - 2xy + 5y$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^5y^2 - x^2 + 5x$

2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{x^2y}$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{xy^2}$

3. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2x+5y}}$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{5}{2\sqrt{2x+5y}}$

4. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (3x^2 + 2x + 3y^2)e^{3x}$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2ye^{3x}$

5. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = sen(y^2)$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xycos(y^2)$

6. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{x}$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -5\,sec^2(5y)$

7. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3[ln(xy)]^2}{x}$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3[ln(xy)]^2}{y}$

8. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = [cos(x^2y) - 2xysen(x^2y)]e^{x-y}$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -[cos(x^2y) + x^2sen(x^2y)]e^{x-y}$

9. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -e^{cosx}senx + y^3$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3xy^2$

10. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{10xy(y^4-x^4)}{(x^4+y^4)^2}$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{5x^2(x^4-3y^4)}{(x^4+y^4)^2}$

11. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2lny}{x^3}$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x^2y}$

12. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3y}}$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{2\sqrt{xy^3}}$

13. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3e^{3x+5y}$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 5e^{3x+5y}$

14. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2cosxsenxsen(2y)$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\,cos^2 x\,cos(2y)$

15. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$

16. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -ysen(xy) + cosy$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -xsen(xy) - xseny$

17. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x lny$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{e^x}{y}$

18. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{x-y}(x+1)$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{x-y}(1-y)$

19. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xcos(x^2+1)$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$

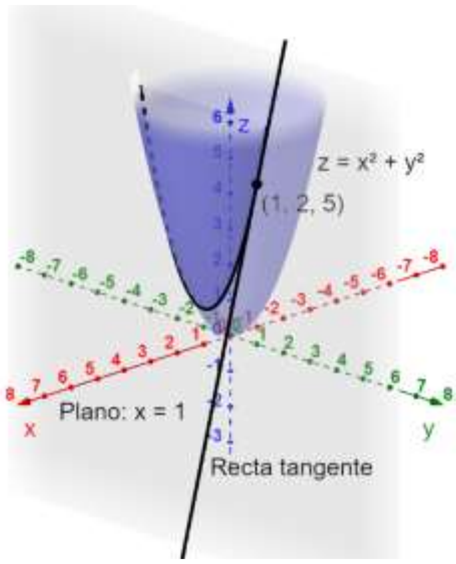
20. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$

21. $\frac{\partial z}{\partial x}(2,-1) = -12$ es la pendiente en la dirección del eje x.

$\frac{\partial z}{\partial y}(2,-1) = 4$ es la pendiente en la dirección del eje y.

22. $\frac{\partial z}{\partial y}(1,2) = 4$ es la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = x^2 + y^2$ con el plano $x = 1$, en el punto $(1, 2, 5)$. En la figura C.7, se muestra la gráfica correspondiente.

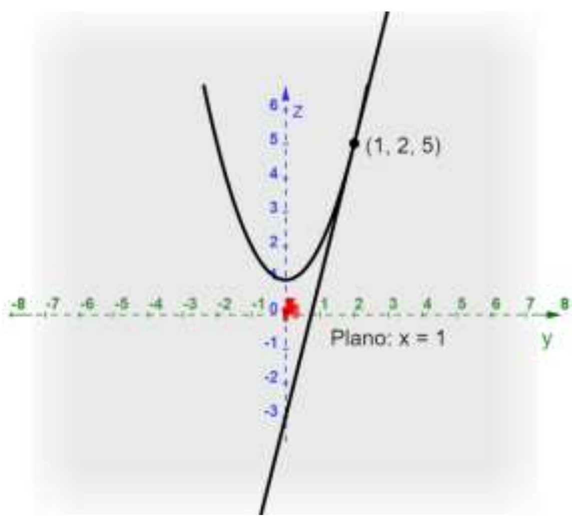
Figura C.7 Gráfica de $z = x^2 + y^2$, del plano $x = 1$ y de la recta tangente a la curva de intersección en el punto $(1, 2, 5)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

Donde la curva de intersección de la superficie $z = x^2 + y^2$ con el plano $x = 1$ es la parábola de ecuación $z = y^2 + 1$, que se obtiene de sustituir $x = 1$ en la ecuación $z = x^2 + y^2$. La gráfica de dicha curva se muestra en la figura C.8.

Figura C.8 Gráfica de la curva de intersección $z = y^2 + 1$ y de la recta tangente a ésta en el punto $(1, 2, 5)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

23. $\frac{\partial T}{\partial x}(2,1) = -\frac{20}{9}$, en $°C/m$, es la razón de cambio de la temperatura respecto a la distancia, recorrida a lo largo de la placa en la dirección positiva del eje x, en el punto $(2,1)$.
$\frac{\partial T}{\partial y}(2,1) = -\frac{10}{9}$, en $°C/m$, es la razón de cambio de la temperatura respecto a la distancia, recorrida a lo largo de la placa en la dirección positiva del eje y, en el punto $(2,1)$.

24. $\frac{\partial V}{\partial h}(12,5) = \frac{25\pi}{3}$, en in^3/in, es la razón de cambio del volumen respecto a la altura, cuando la altura es $h = 12\ in$ y el radio es $r = 5\ in$.

25. $\frac{\partial P}{\partial T}(200,150) = \frac{k}{150}$, en lb/in^2 por K, es la razón de cambio de la presión respecto a la temperatura, cuando la temperatura es $T = 200\ K$ y el volumen es $V = 150\ in^3$.
$\frac{\partial P}{\partial V}(200,150) = -\frac{2k}{225}$, en lb/in^2 por in^3, es la razón de cambio de la presión respecto al volumen, cuando la temperatura es $T = 200\ K$ y el volumen es $V = 150\ in^3$.

26. El conjunto más grande donde $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ es diferenciable es su dominio $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y,z) \neq (0,0,0)\}$ y su derivada es la matriz Jacobiana:

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} -\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} & -\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} & -\frac{z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \end{bmatrix}$$

27. El conjunto más grande donde $f(x,y,z) = \left(e^z\, ln(x^2+y^2),\ xysen(z^2+1)\right)$ es diferenciable es su dominio $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2 > 0\}$ y su derivada es la matriz Jacobiana:

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{2xe^z}{x^2+y^2} & \frac{2ye^z}{x^2+y^2} & e^z\, ln(x^2+y^2) \\ ysen(z^2+1) & xsen(z^2+1) & 2xyzcos(z^2+1) \end{bmatrix}$$

28. El conjunto más grande donde $f(x,y) = \left(xseny,\ y^2cos(x-y),\ \frac{1}{xy}\right)$ es diferenciable es su dominio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | xy \neq 0\}$ y su derivada es la matriz Jacobiana:

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} seny & xcosy \\ -y^2sen(x-y) & y^2sen(x-y) + 2ycos(x-y) \\ -\frac{1}{x^2y} & -\frac{1}{xy^2} \end{bmatrix}$$

29. El conjunto más grande donde $f(x) = \left(tan(2x-1),\ e^{-x},\ x^{-3/2}\right)$ es diferenciable es su dominio $\{x \in \mathbb{R}\ |\ x > 0,\ cos(2x-1) \neq 0\}$ y su derivada es la matriz Jacobiana:

$$Df(x) = \begin{bmatrix} 2\, sec^2(2x-1) \\ -e^{-x} \\ -\frac{3}{2\sqrt{x^5}} \end{bmatrix}$$

30. El conjunto más grande donde $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ es diferenciable es el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1-x^2-y^2 > 0\} \neq Domf$ y su derivada es la matriz Jacobiana:

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{bmatrix}$$

31. El conjunto más grande donde $f(x,y,z) = (z^2 + ln(xy),\ e^z\, cos(x^2+y^2),\ x^2yz^2)$ es diferenciable es su dominio $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | xy > 0\}$ y su derivada es la matriz Jacobiana:

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & 2z \\ -2xe^zsen(x^2+y^2) & -2ye^zsen(x^2+y^2) & e^z\, cos(x^2+y^2) \\ 2xyz^2 & x^2z^2 & 2x^2yz \end{bmatrix}$$

32. El conjunto más grande donde $f(x,y,z) = \left(e^{x^2+1}sen(y^2+2z),\ xz-y\right)$ es diferenciable es su dominio $\mathbb{R}^3$ y su derivada es la matriz Jacobiana:

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2xe^{x^2+1}sen(y^2+2z) & 2ye^{x^2+1}cos(y^2+2z) & 2e^{x^2+1}cos(y^2+2z) \\ z & -1 & x \end{bmatrix}$$

33. El conjunto más grande donde $f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2},\ \frac{1}{x-y}\right)$ es diferenciable es su dominio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x-y \neq 0\}$ y su derivada es la matriz Jacobiana:

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\dfrac{1}{(x-y)^2} & \dfrac{1}{(x-y)^2} \end{bmatrix}$$

34. Para demostrar que la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ no es diferenciable en $(0,0)$ basta con verificar que es discontinua en $(0,0)$. En efecto, el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ no existe, puesto que $f(x,y)$ se aproxima a 0 cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ por los ejes coordenados, pero se aproxima a $\frac{1}{2}$ cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ por la recta identidad; de aquí que, f es discontinua en $(0,0)$. Luego, por la Contrapositiva de "Diferenciabilidad implica Continuidad": f no es diferenciable en $(0,0)$.

35. Por la regla de la cadena se tiene que $D(f \circ g)(t) = [-2e^{-t}(cost + sent)]$; o bien: $(f \circ g)'(t) = -2e^{-t}(cost + sent)$

36. Por la regla de la cadena se tiene que: $D(f \circ g)(x,y,z) = [2xy^2 - 2ze^{-2xz} \quad 2x^2y \quad 4z^3 - 2xe^{-xz}]$

37. Por la regla de la cadena se tiene que: $D(f \circ g)(1,1) = \begin{bmatrix} e^2+1 & e^2-1 \\ -9 & -15 \end{bmatrix}$

38. Por la regla de la cadena se tiene que:

$$\frac{\partial u}{\partial r}(r,s) = 6r + 10s$$

$$\frac{\partial u}{\partial s}(r,s) = 10r - 16s$$

39. La temperatura cambia con respecto al tiempo a una tasa de $-3\ °C/min$.

40. El volumen aumenta con respecto al tiempo a una tasa de $7.6\pi\ m^3/min$.

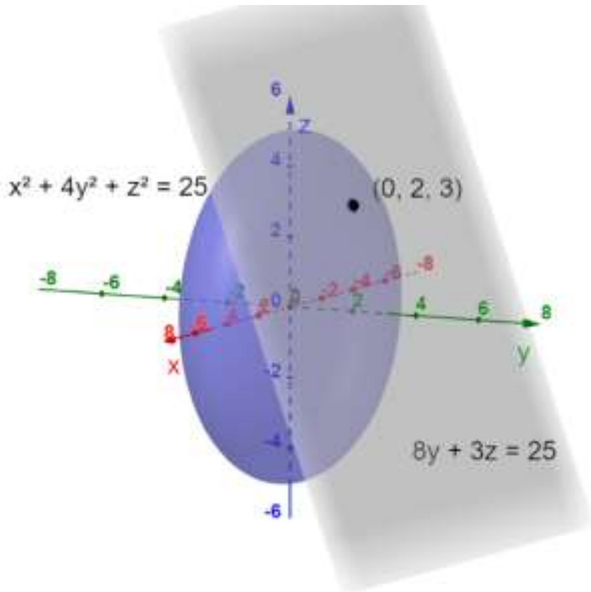
41. La tasa de cambio del volumen con respecto al tiempo es de $-0.0831\ L/s$.

42. La derivada direccional de $f(x,y,z) = x^2z + 2y^3$ en el punto $P = (1,1,2)$ en la dirección del vector $v = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$ es $\frac{16}{\sqrt{5}}$.

43. La derivada direccional de $f(x,y,z) = e^{-xz} + y$ en el punto $P = (1,1,1)$ en la dirección del vector $v = (1,-1,1)$ es $-\frac{2+e}{\sqrt{3}e}$.

44. Una ecuación del plano tangente al elipsoide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 25$ en el punto $(0,2,3)$ es $8y + 3z = 25$. Ver la gráfica en la figura C.9.

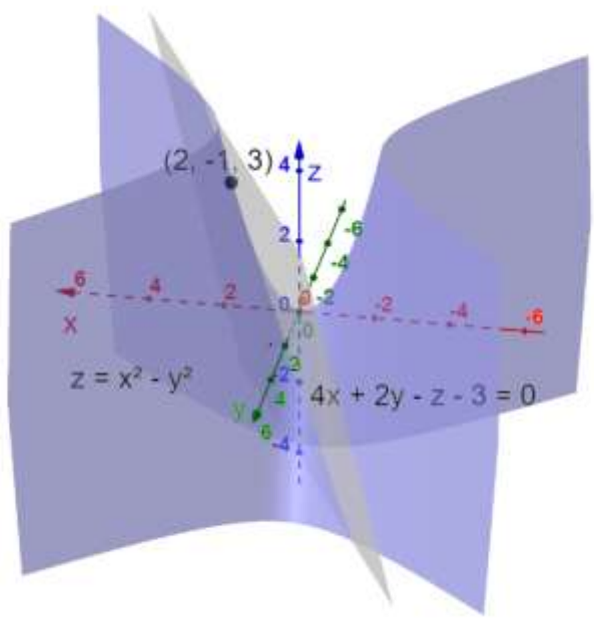
Figura C.9 Gráfica de $x^2 + 4y^2 + z^2 = 25$ y de su plano tangente en el punto $(0,2,3)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

45. Una ecuación del plano tangente al paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ en el punto $(2, -1, 3)$ es $4x + 2y - z - 3 = 0$. Ver la gráfica en la figura C.10.

Figura C.10 Gráfica de $z = x^2 - y^2$ y de su plano tangente en el punto $(2, -1, 3)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

Capítulo 4. Derivadas de Orden Superior

1. Si $f(x,y) = \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y^2} - \frac{2y}{x^3} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{6y}{x^4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y^2} - \frac{2y}{x^3} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -2\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x^2} - \frac{2x}{y^3} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{6x}{y^4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x^2} - \frac{2x}{y^3} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}\right)$$

2. Si $f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{12xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{3(6x^2y^2-x^4-y^4)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{12xy(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{3(6x^2y^2-x^4-y^4)}{(x^2+y^2)^4}$$

3. Si $f(x,y) = \frac{4xy-x^2y^2}{2(x+y)}$, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2(4-2xy-x^2)}{2(x+y)^2} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{y^2(y^2+4)}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2(4-2xy-x^2)}{2(x+y)^2} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{xy(4-3xy-x^2-y^2)}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2(4-2xy-y^2)}{2(x+y)^2} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{x^2(x^2+4)}{(x+y)^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2(4-2xy-y^2)}{2(x+y)^2} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{xy(4-3xy-x^2-y^2)}{(x+y)^3}$$

4. Si $f(x,y) = xe^{3y} + 5x^2y$, entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 10y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{3y} + 10xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 3e^{3y} + 10x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 9xe^{3y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3xe^{3y} + 5x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 3e^{3y} + 10x$$

5. Si $f(x,y) = e^x sen(2y) + ln(xy)$, entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^x sen(2y) - \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x sen(2y) + \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2e^x \cos(2y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -4e^x sen(2y) - \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2e^x \cos(2y) + \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2e^x \cos(2y)$$

6. Si $f(x,y) = \cos(x^2y^3)$, entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -4x^2y^6\cos(x^2y^3) - 2y^3 sen(x^2y^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2xy^3 sen(x^2y^3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -6x^3y^5\cos(x^2y^3) - 6xy^2 sen(x^2y^3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -9x^4y^4\cos(x^2y^3) - 6x^2y\, sen(x^2y^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3x^2y^2 sen(x^2y^3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -6x^3y^5\cos(x^2y^3) - 6xy^2 sen(x^2y^3)$$

7. Si $f(x,y) = e^{-xy^2} + 2x^5y^4$, entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y^4e^{-xy^2} + 40x^3y^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y^2e^{-xy^2} + 10x^4y^4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2xy^3e^{-xy^2} - 2ye^{-xy^2} + 40x^4y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2xye^{-xy^2} + 8x^5y^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4x^2y^2e^{-xy^2} - 2xe^{-xy^2} + 24x^5y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2xy^3e^{-xy^2} - 2ye^{-xy^2} + 40x^4y^3$$

8. Si $f(x,y) = tan(x-2y)$, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = sec^2(x-2y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2tan(x-2y)\,sec^2(x-2y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -4tan(x-2y)\,sec^2(x-2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2\,sec^2(x-2y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 8tan(x-2y)\,sec^2(x-2y)$$

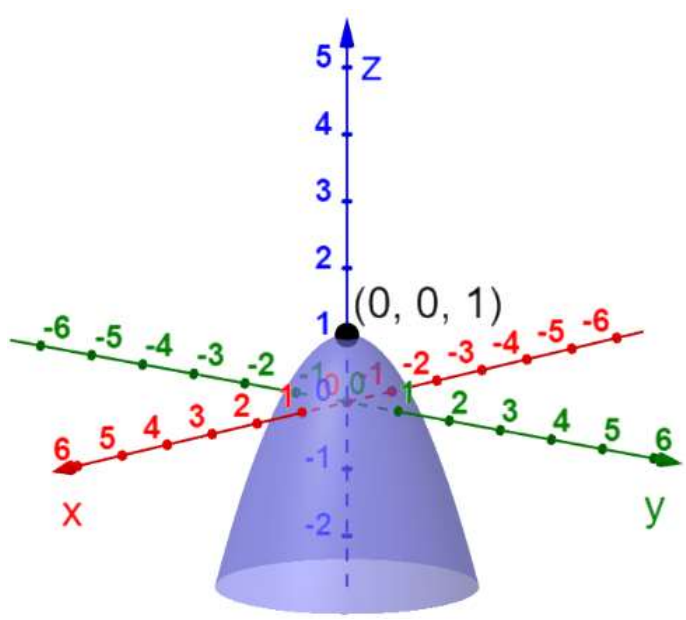
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4tan(x-2y)\,sec^2(x-2y)$$

9. Si $f(x,y,z) = ze^{-xy} + x^2yz^3$, entonces $\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = xye^{-xy} - e^{-xy} + 6xz^2$.

10. La función $f(x,y) = e^x seny$ sí es armónica puesto que es de clase C^2 (sus derivadas parciales de segundo orden son continuas) y es tal que: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^x seny + (-e^x seny) = 0$.

11. Si $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$, entonces:
(a) $(0,0)$ es el único punto crítico de f.
(b) f alcanza un máximo local en $(0,0)$ y vale 1. En la gráfica, $(0,0,1)$ es un punto máximo local. Ver la figura C.11.

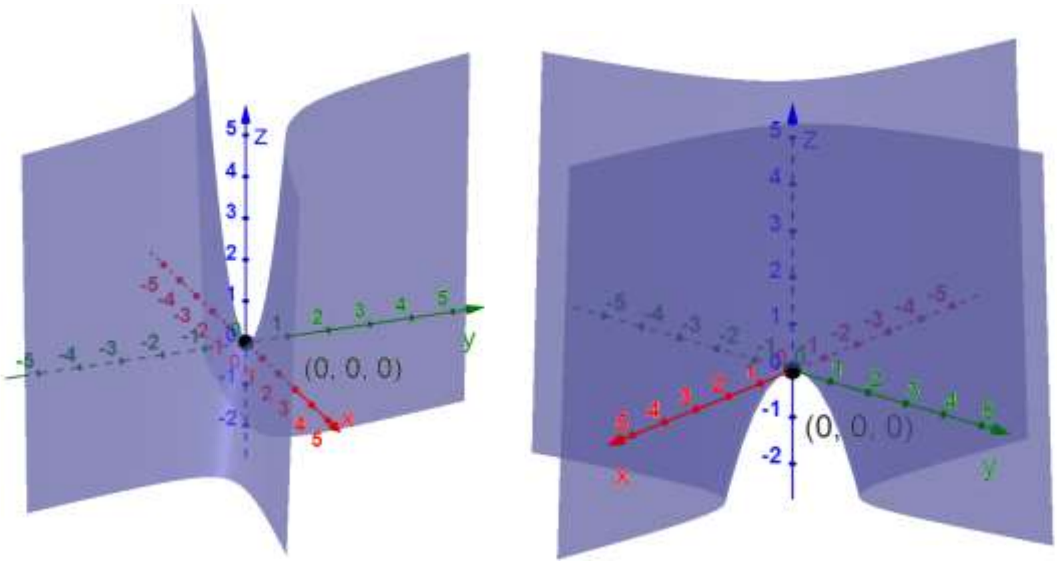
Figura C.11 La función $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ alcanza un máximo local en $(0,0)$ y vale 1



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

12. Si $f(x,y) = x^2 + y^2 + 5xy$, entonces:
(a) $(0,0)$ es el único punto crítico de f.
(b) f no alcanza ni máximo ni mínimo en $(0,0)$; es decir, se trata de un punto silla.
Ver la figura C.12.

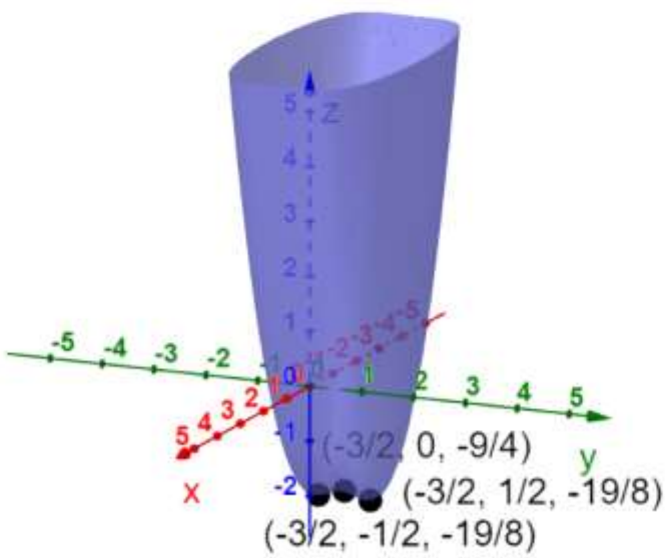
Figura C.12 La función $f(x,y) = x^2 + y^2 + 5xy$ no alcanza un máximo ni un mínimo local en $(0,0)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

13. Si $f(x,y) = 2y^4 - y^2 + x^2 + 3x$, entonces:
(a) $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ son los puntos críticos de f.
(b) f alcanza un mínimo local en dos de sus puntos críticos, $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, y el valor del mínimo en ambos puntos es de $-\frac{19}{8}$; mientras que, el punto crítico $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ es un punto silla. Ver la figura C.13.

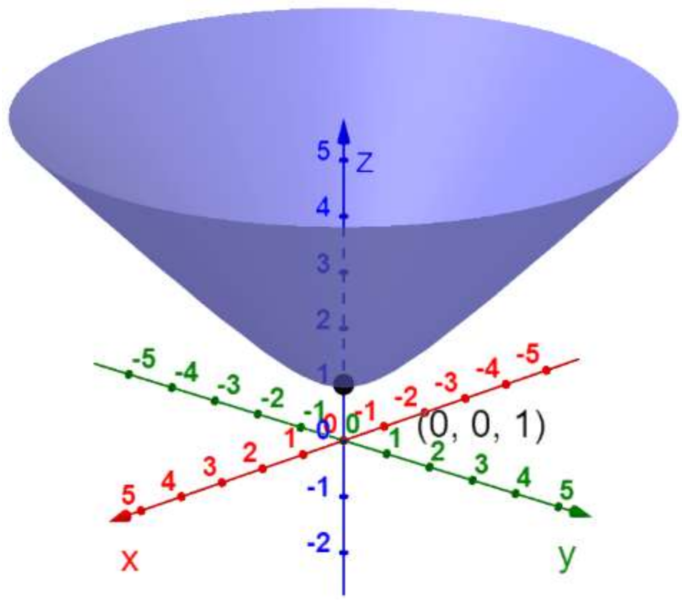
Figura C.13 La función $f(x,y) = 2y^4 - y^2 + x^2 + 3x$ tiene dos puntos mínimos locales, $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{19}{8}\right)$ y $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{19}{8}\right)$, y un punto silla $\left(-\frac{3}{2}, 0, -\frac{9}{4}\right)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

14. Si $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$, entonces:
(a) $(0,0)$ es el único punto crítico de f.
(b) f alcanza un mínimo local en $(0,0)$ y vale 1. En la gráfica, $(0,0,1)$ es un punto mínimo local. Ver la figura C.14.

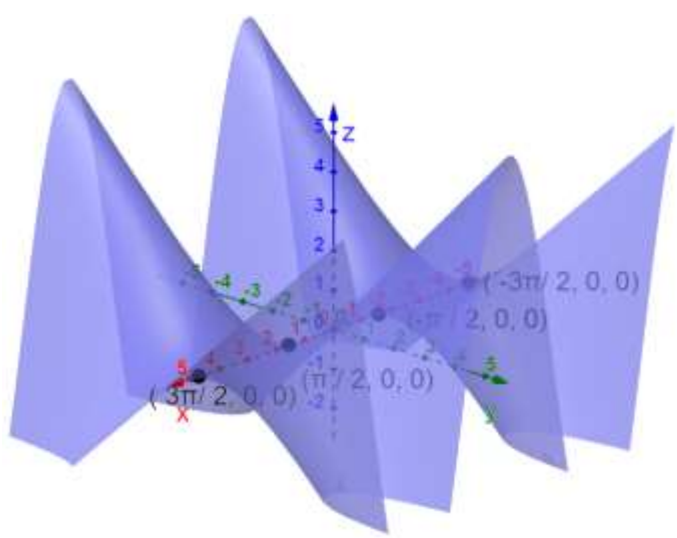
Figura C.14 La función $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ alcanza un mínimo local en $(0,0)$ y vale 1



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

15. Si $f(x,y) = ycosx$, entonces:
(a) $\left\{\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}, 0\right) \in \mathbb{R}^2 \mid k \text{ entero}\right\}$ es el conjunto de puntos críticos de f; por ejemplo, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), \left(-\frac{3\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{5\pi}{2}, 0\right), \left(-\frac{5\pi}{2}, 0\right)$ son algunos puntos críticos de f.
(b) f no alcanza ni máximo ni mínimo en sus puntos críticos; es decir, cada uno de sus puntos críticos es un punto silla. Ver la figura C.15.

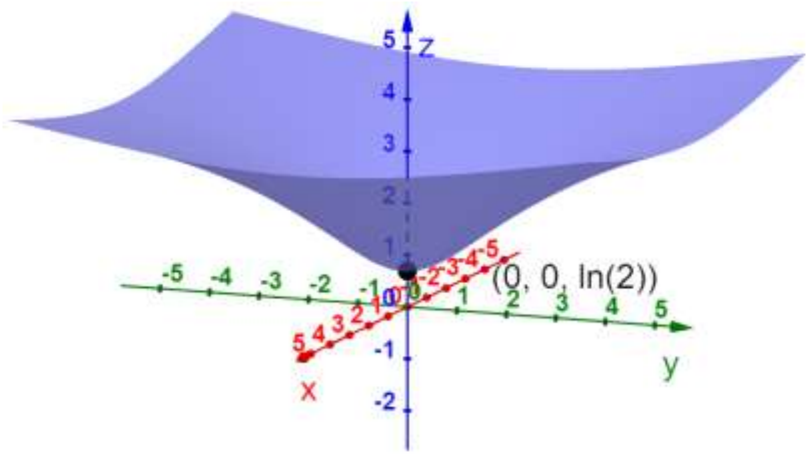
Figura C.15 Para la función $f(x,y) = ycosx$ todos sus puntos críticos son puntos silla, como $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), \left(-\frac{3\pi}{2}, 0\right)$



Fuente:Elaboración Propia con GeoGebra 3D

16. Si $f(x,y) = ln(2 + x^2 + y^2)$, entonces:
(a) $(0,0)$ es el único punto crítico de f.
(b) f alcanza un mínimo local en $(0,0)$ y vale $ln2$. En la gráfica, $(0,0,ln2)$ es un punto mínimo local. Ver la figura C.16.

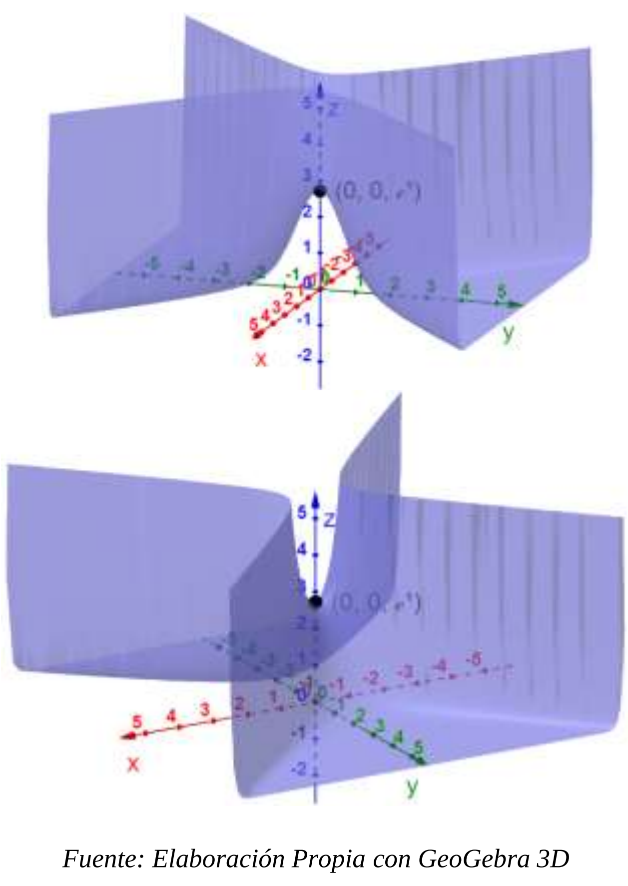
Figura C.16 La función $f(x,y) = ln(2 + x^2 + y^2)$ alcanza un mínimo local en $(0,0)$ y vale $ln2$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

17. Si $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$, entonces:
(a) $(0,0)$ es el único punto crítico de f.
(b) f no alcanza ni máximo ni mínimo en $(0,0)$; es decir, se trata de un punto silla.
Ver la figura C.17.

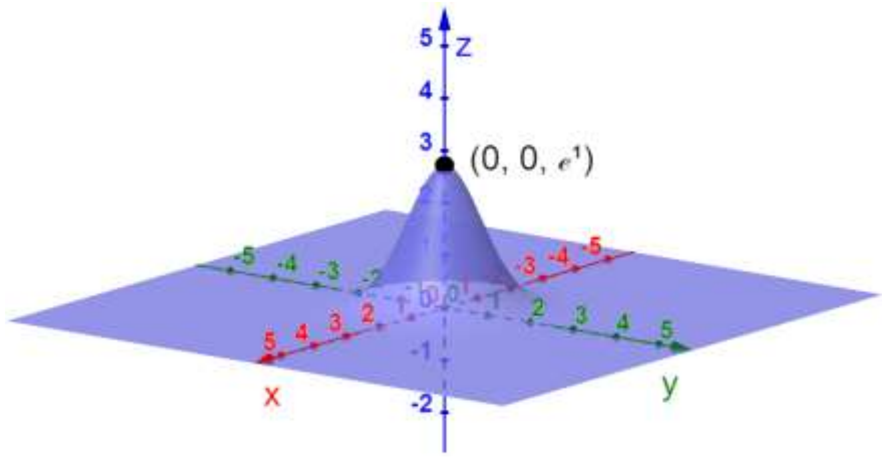
Figura C.17 La función $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$ no alcanza un máximo ni un mínimo local en $(0,0)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

18. Si $f(x,y) = e^{1-x^2-y^2}$, entonces:
(a) $(0,0)$ es el único punto crítico de f.
(b) f alcanza un máximo local en $(0,0)$ y vale e. En la gráfica, $(0,0,e)$ es un punto máximo local. Ver la figura C.18.

Figura C.18 La función $f(x,y) = e^{1-x^2-y^2}$ alcanza un máximo local en $(0,0)$ y vale e



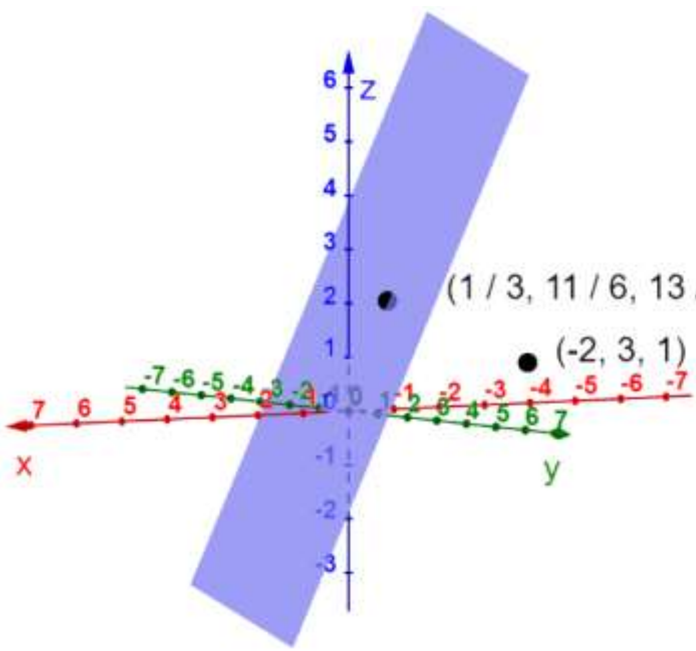
Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

19. Las dimensiones necesarias para que la caja tenga un volumen máximo son: 12 cm de largo, 12 cm de ancho y 12 cm de profundidad o altura.

20. El costo mínimo para la construcción del tanque es de 576 dólares.

21. El punto del plano $2x - y + z = 1$ que se encuentra más cercano al punto $(-2,3,1)$ es $\left(\frac{1}{3}, \frac{11}{6}, \frac{13}{6}\right)$, siendo la distancia mínima igual a $\sqrt{\frac{49}{6}}$. Ver la figura C.19.

Figura C.19 Gráfica del plano $2x - y + z = 1$, donde $\left(\frac{1}{3}, \frac{11}{6}, \frac{13}{6}\right)$ es el punto más cercano a $(-2,3,1)$



Fuente: Elaboración Propia con GeoGebra 3D

Referencias

Estrada, O., García, P., & Monsivais, G. (2003). Cálculo Vectorial y Aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamérica.

Grossman, S. I., & Flores, J. J. (2012). Álgebra Lineal (7° ed.). McGraw-Hill Educación.

Larson, R. E., Hostetler, R. P., Edwards, B. H., & Heyd, D. E. (1996). Cálculo y Geometría Analítica. Volumen 2 (6° ed.). McGraw-Hill.

Leithold, L. (1998). El Cálculo (7° ed.). Oxford University Press.

Marsden, J. E., & Tromba, A. J. (1991). Cálculo Vectorial (3° ed.). Addison-Wesley Iberoamericana.

Purcell, E. J., Varberg, D., & Rigdon, S. E. (2007). Cálculo (9° ed.). Pearson Educación.

Stewart, J. (1999). Calculus (4° ed.). Brooks/Cole Publishing Company.

Swokowski, E. W., & Cole, J. A. (2009). Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry (12° ed.). Brooks/Cole Cengage Learning.

Vera, S. (2005). Cálculo para la Ingeniería. Editorial Abecedario.

Agradecimientos

Quiero iniciar agradeciendo a RODRÍGUEZ-CASTILLO, Erika Carolina. PhD, Rectora de la Universidad Martí, por otorgarme la oportunidad de ingresar en el posgrado, por brindar siempre la información oportuna y por su cálido acompañamiento durante mi estancia en el doctorado. A ROCHA-LAGUNES, Martín. PhD, Director de Servicios Escolares, por estar siempre pendiente de mis requerimientos académicos y proporcionarme su apoyo, con profesionalismo y calidad humana.

Así mismo, quiero dar las gracias a mis catedráticos del Doctorado en Ingeniería de la Universidad Martí, que, con sus enseñanzas, su experiencia y su espíritu de superación dirigieron mi aprendizaje, propiciando siempre un ambiente cálido, de empatía, comprensión y flexibilidad. En especial, a CERVANTES-PÉREZ, Juan. PhD, por las prácticas llevadas a cabo fuera del aula y a ZÚÑIGA-CASTAÑEDA, Cristina Elizabeth. PhD, RAMÍREZ-SÁNCHEZ, Jesús. PhD y ÁLVAREZ-SÁNCHEZ, Ervin Jesús. PhD con quiénes tuvimos que sortear la situación producida por el COVID-19, y supieron adaptar el proceso de enseñanza-aprendizaje y llevarlo del aula a nuestros hogares, brindándonos todas las facilidades sin mermar la calidad educativa.

A GALÁN-MÉNDEZ, Frixia. PhD, le agradezco por haber aceptado revisar mi libro y ser partícipe en la mejora de éste, con sus observaciones y sugerencias, de manera oportuna y con el profesionalismo que la caracteriza; además de ser una colega y querida amiga.

A mis estimados colegas en el arduo pero gratificante trabajo docente en la Unidad de Ingeniería y Ciencias Químicas de la Universidad Veracruzana, muchas gracias por su apoyo en el momento que lo he necesitado. En especial, deseo agradecer a grandes personalidades dentro de la Universidad Veracruzana, como son: GÓMEZ-RODRÍGUEZ, Rafael. PhD, HERNÁNDEZ-Y ORTEGA, José. MsC (q.e.p.d.), GARCÍA-REYES, Fausto. MsC y DOMÍNGUEZ-CAÑEDO, Irma Liliana. PhD, con quienes tengo el agrado de haber coincidido en la Facultad de Ciencias Químicas, así como a RICAÑO-HERRERA, Francisco. PhD, actual director de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, a LÓPEZ-MARTÍNEZ, Raquiel Rufino. PhD, catedrático de la Facultad de Matemáticas y a GASCA-HERRERA, Ángel Eduardo. PhD, catedrático de la Facultad de Instrumentación Electrónica; a todos ellos, les agradezco por haber creído en mí y contribuir de manera significativa en mi superación profesional. A mis compañeros, FERNÁNDEZ-ROSALES, Víctor. MsC, MORA-MURRIETA, Betzabé. PhD, CERDÁN-CABRERA, Ana María. MsC y PÉREZ-SÁNCHEZ, Cándida Leticia. PhD, muchas gracias por representar para mí un fuerte pilar en cuestiones de trabajo y por su amistad incondicional.

A mis compañeros del doctorado, con quiénes tuve el privilegio y el placer de compartir muchas experiencias de aprendizaje, pero también de solidaridad y amistad, les agradezco mucho.

Finalmente, a mis familiares y amigos más cercanos, gracias por su amor, su tiempo, su paciencia y su compañía, que ha sido una motivación para poder culminar este proyecto tan importante en mi vida profesional; en especial, a mi madre y a mi hermana, les agradezco por siempre estar para mí, a ellas les dedico este libro con mucho cariño, gracias por todo.

[Título en Times New Roman y Negritas No. 14 en Español e Inglés]

Apellidos (EN MAYUSCULAS), Nombre del 1er Autor†*, Apellidos (EN MAYUSCULAS), Nombre del 1er Coautor, Apellidos (EN MAYUSCULAS), Nombre del 2do Coautor y Apellidos (EN MAYUSCULAS), Nombre del 3er Coautor

Institución de Afiliación del Autor incluyendo dependencia (en Times New Roman No.10 y Cursiva)

International Identification of Science - Technology and Innovation

ID 1er Autor: (ORC ID - Researcher ID Thomson, arXiv Author ID - PubMed Autor ID - Open ID) y CVU 1er Autor: (Becario-PNPC o SNI-CONAHCYT) (No.10 Times New Roman)

ID 1er Coautor: (ORC ID - Researcher ID Thomson, arXiv Author ID - PubMed Autor ID - Open ID) y CVU 1er Coautor: (Becario-PNPC o SNI-CONAHCYT) (No.10 Times New Roman)

ID 2do Coautor: (ORC ID - Researcher ID Thomson, arXiv Author ID - PubMed Autor ID - Open ID) y CVU 2do Coautor: (Becario-PNPC o SNI-CONAHCYT) (No.10 Times New Roman)

ID 3er Coautor: (ORC ID - Researcher ID Thomson, arXiv Author ID - PubMed Autor ID - Open ID) y CVU 3er Coautor: (Becario-PNPC o SNI-CONAHCYT) (No.10 Times New Roman)

(Indicar Fecha de Envío: Mes, Día, Año); Aceptado (Indicar Fecha de Aceptación: Uso Exclusivo de ECORFAN)

Citación: Primer letra (EN MAYUSCULAS) del Nombre del 1er Autor. Apellido, Primer letra (EN MAYUSCULAS) del Nombre del 1er Coautor. Apellido, Primer letra (EN MAYUSCULAS) del Nombre del 2do Coautor. Apellido, Primer letra (EN MAYUSCULAS) del Nombre del 3er Coautor. Apellido

Correo institucional [Times New Roman No.10]

Primera letra (EN MAYUSCULAS) del Nombre Editores. Apellidos (eds.) Título del Book [Times New Roman No.10], Temas Selectos del área que corresponde ©ECORFAN- Filial, Año.

Abstract

Texto redactado en Times New Roman No.12, espacio sencillo, en inglés.

Indicar (3-5) palabras clave en Times New Roman y Negritas No.12

Introducción

Texto redactado en Times New Roman No.12, espacio sencillo.

Explicación del tema en general y explicar porque es importante.

¿Cuál es su valor agregado respecto de las demás técnicas?.

Enfocar claramente cada una de sus características.

Explicar con claridad el problema a solucionar y la hipótesis central.

Explicación de las secciones del Capítulo.

Desarrollo de Secciones y Apartados del Capítulo con numeración subsecuente

[Título en Times New Roman No.12, espacio sencillo y Negrita]

Desarrollo de Capítulos en Times New Roman No.12, espacio sencillo.

Inclusión de Gráficos, Figuras y Tablas-Editables

En *el contenido del Capítulo* todo gráfico, tabla y figura debe ser editable en formatos que permitan modificar tamaño, tipo y número de letra, a efectos de edición, estas deberán estar en alta calidad, no pixeladas y deben ser notables aun reduciendo la imagen a escala.

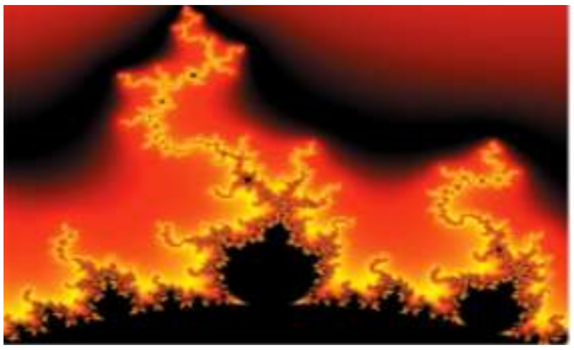
[Indicando el título en la parte Superior con Times New Roman No.12 y Negrita, señalando la fuente en la parte Inferior centrada con Times New Roman No. 10]

Tabla 1.1 Título

Variable	Descripción	Valor
P_1	Partición 1	481.00
P_2	Partición 2	487.00
P_3	Partición 3	484.00
P_4	Partición 4	483.50
P_5	Partición 5	484.00
P_6	Partición 6	490.79
P_7	Partición 7	491.61

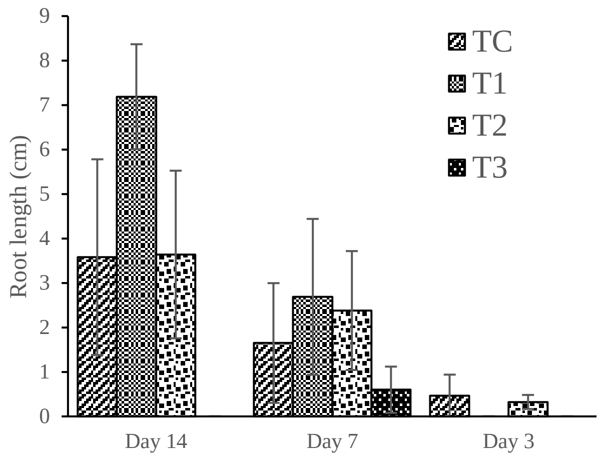
Fuente de Consulta:
(No deberán ser imágenes, todo debe ser editable)

Figura 1.1 Título



Fuente de Consulta:
(No deberán ser imágenes, todo debe ser editable)

Gráfico 1.1 Título



Fuente de Consulta:
(No deberán ser imágenes, todo debe ser editable)

Cada Capítulo deberá presentar de manera separada en 3 Carpetas: a) Figuras, b) Gráficos y c) Tablas en formato .JPG, indicando el número en Negrita y el Titulo secuencial.

Para el uso de Ecuaciones, señalar de la siguiente forma:

$$\int_{lim^{-1}}^{lim^{1}} = \int \frac{lim^{1}}{lim^{-1}} = \left[\frac{1\,(-1)}{lim}\right]^{2} = \frac{(0)^{2}}{lim} = \sqrt{lim} = 0 = 0 \rightarrow \propto \qquad (1)$$

Deberán ser editables y con numeración alineada en el extremo derecho.

Metodología a desarrollar

Dar el significado de las variables en redacción lineal y es importante la comparación de los criterios usados.

Resultados

Los resultados deberán ser por sección del Capítulo.

Anexos

Tablas y fuentes adecuadas.
Agradecimiento

Indicar si fueron financiados por alguna Institución, Universidad o Empresa.

Conclusiones

Explicar con claridad los resultados obtenidos y las posibilidades de mejora.

Referencias

Utilizar sistema APA. No deben estar numerados, tampoco con viñetas, sin embargo en caso necesario de numerar será porque se hace referencia o mención en alguna parte del Capítulo.

Ficha Técnica

Cada Capítulo deberá presentar en un documento Word (.docx):

Nombre del Book
Título del Capítulo
Abstract
Keywords
Secciones del Capítulo, por ejemplo:

1. *Introducción*
2. *Descripción del método*
3. *Análisis a partir de la regresión por curva de demanda*
4. *Resultados*
5. *Agradecimiento*
6. *Conclusiones*
7. *Referencias*

Nombre de Autor (es)
Correo Electrónico de Correspondencia al Autor
Referencias

Requerimientos de Propiedad Intelectual para su edición:

-Firma Autógrafa en Color Azul del Formato de Originalidad del Autor y Coautores.

-Firma Autógrafa en Color Azul del Formato de Aceptación del Autor y Coautores.

-Firma Autógrafa en Color Azul del Formato de Conflicto de Intereses del Autor y Coautores.

Reserva a la Política Editorial

ECORFAN Books se reserva el derecho de hacer los cambios editoriales requeridos para adecuar la Obra Científica a la Política Editorial del ECORFAN Books. Una vez aceptada la Obra Científica en su versión final, el ECORFAN Books enviará al autor las pruebas para su revisión. ECORFAN® únicamente aceptará la corrección de erratas y errores u omisiones provenientes del proceso de edición de la revista reservándose en su totalidad los derechos de autor y difusión de contenido. No se aceptarán supresiones, sustituciones o añadidos que alteren la formación de la Obra Científica.

Código de Ética – Buenas Prácticas y Declaratoria de Solución a Conflictos Editoriales

Declaración de Originalidad y carácter inédito de la Obra Científica, de Autoría, sobre la obtención de datos e interpretación de resultados, Agradecimientos, Conflicto de intereses, Cesión de derechos y distribución.

La Dirección de ECORFAN-México, S.C reivindica a los Autores de la Obra Científica que su contenido debe ser original, inédito y de contenido Científico, Tecnológico y de Innovación para someterlo a evaluación.

Los Autores firmantes de la Obra Científica deben ser los mismos que han contribuido a su concepción, realización y desarrollo, así como a la obtención de los datos, la interpretación de los resultados, su redacción y revisión. El Autor de correspondencia de la Obra Científica propuesto requisitara el formulario que sigue a continuación.

Título de la Obra Científica:

- El envío de una Obra Científica a ECORFAN Books emana el compromiso del autor de no someterlo de manera simultánea a la consideración de otras publicaciones seriadas para ello deberá complementar el Formato de Originalidad para su Obra Científica, salvo que sea rechazado por el Comité de Arbitraje, podrá ser retirado.

- Ninguno de los datos presentados en esta Obra Científica ha sido plagiado ó inventado. Los datos originales se distinguen claramente de los ya publicados. Y se tiene conocimiento del testeo en PLAGSCAN si se detecta un nivel de plagio Positivo no se procederá a arbitrar.

- Se citan las referencias en las que se basa la información contenida en la Obra Científica, así como las teorías y los datos procedentes de otras Obras Científicas previamente publicados.

- Los autores firman el Formato de Autorización para que su Obra Científica se difunda por los medios que ECORFAN-México, S.C. en su Holding México considere pertinentes para divulgación y difusión de su Obra Científica cediendo sus Derechos de Obra Científica.

- Se ha obtenido el consentimiento de quienes han aportado datos no publicados obtenidos mediante comunicación verbal o escrita, y se identifican adecuadamente dicha comunicación y autoría.

- El Autor y Co-Autores que firman este trabajo han participado en su planificación, diseño y ejecución, así como en la interpretación de los resultados. Asimismo, revisaron críticamente el trabajo, aprobaron su versión final y están de acuerdo con su publicación.

- No se ha omitido ninguna firma responsable del trabajo y se satisfacen los criterios de Autoría Científica.

- Los resultados de esta Obra Científica se han interpretado objetivamente. Cualquier resultado contrario al punto de vista de quienes firman se expone y discute en la Obra Científica.

Copyright y Accesso

La publicación de esta Obra Científica supone la cesión del copyright a ECORFAN-Mexico, S.C en su Holding México para su ECORFAN Books, que se reserva el derecho a distribuir en la Web la versión publicada de la Obra Científica y la puesta a disposición de la Obra Científica en este formato supone para sus Autores el cumplimiento de lo establecido en la Ley de Ciencia y Tecnología de los Estados Unidos Mexicanos, en lo relativo a la obligatoriedad de permitir el acceso a los resultados de Investigaciones Científicas.

Título de la Obra Científica:

Nombre y apellidos del Autor de contacto y de los Coautores	Firma
1.	
2.	
3.	
4.	

Principios de Ética y Declaratoria de Solución a Conflictos Editoriales

Responsabilidades del Editor

El Editor se compromete a garantizar la confidencialidad del proceso de evaluación, no podrá revelar a los Árbitros la identidad de los Autores, tampoco podrá revelar la identidad de los Árbitros en ningún momento.

El Editor asume la responsabilidad de informar debidamente al Autor la fase del proceso editorial en que se encuentra el texto enviado, así como de las resoluciones del arbitraje a Doble Ciego.

El Editor debe evaluar los manuscritos y su contenido intelectual sin distinción de raza, género, orientación sexual, creencias religiosas, origen étnico, nacionalidad, o la filosofía política de los Autores.

El Editor y su equipo de edición de los Holdings de ECORFAN® no divulgarán ninguna información sobre la Obra Científica enviado a cualquier persona que no sea el Autor correspondiente.

El Editor debe tomar decisiones justas e imparciales y garantizar un proceso de arbitraje por pares justa.

Responsabilidades del Consejo Editorial

La descripción de los procesos de revisión por pares es dado a conocer por el Consejo Editorial con el fin de que los Autores conozcan cuáles son los criterios de evaluación y estará siempre dispuesto a justificar cualquier controversia en el proceso de evaluación. En caso de Detección de Plagio a la Obra Científica el Comité notifica a los Autores por Violación al Derecho de Autoría Científica, Tecnológica y de Innovación.

Responsabilidades del Comité Arbitral

Los Árbitros se comprometen a notificar sobre cualquier conducta no ética por parte de los Autores y señalar toda la información que pueda ser motivo para rechazar la publicación de la Obra Científica. Además, deben comprometerse a mantener de manera confidencial la información relacionada con la Obra Científica que evalúan.

Cualquier manuscrito recibido para su arbitraje debe ser tratado como documento confidencial, no se debe mostrar o discutir con otros expertos, excepto con autorización del Editor.

Los Árbitros se deben conducir de manera objetiva, toda crítica personal al Autor es inapropiada.

Los Árbitros deben expresar sus puntos de vista con claridad y con argumentos válidos que contribuyan al que hacer Científico, Tecnológica y de Innovación del Autor.

Los Árbitros no deben evaluar los manuscritos en los que tienen conflictos de intereses y que se hayan notificado al Editor antes de someter la Obra Científica a evaluación.

Responsabilidades de los Autores

Los Autores deben garantizar que sus Obras Científicas son producto de su trabajo original y que los datos han sido obtenidos de manera ética.

Los Autores deben garantizar no han sido previamente publicados o que no estén siendo considerados en otra publicación seriada.

Los Autores deben seguir estrictamente las normas para la publicación de Obra Científica definidas por el Consejo Editorial.

Los Autores deben considerar que el plagio en todas sus formas constituye una conducta no ética editorial y es inaceptable, en consecuencia, cualquier manuscrito que incurra en plagio será eliminado y no considerado para su publicación.

Los Autores deben citar las publicaciones que han sido influyentes en la naturaleza de la Obra Científica presentado a arbitraje.

Servicios de Información

Indización - Bases y Repositorios

RESEARCH GATE (Alemania)
MENDELEY (Gestor de Referencias bibliográficas)
GOOGLE SCHOLAR (Índices de citaciones-Google)
REDIB (Red Iberoamericana de Innovación y Conocimiento Científico- CSIC)

Servicios Editoriales

Identificación de Citación e Índice H
Administración del Formato de Originalidad y Autorización
Testeo de Books con PLAGSCAN
Evaluación de Obra Científica
Emisión de Certificado de Arbitraje
Edición de Obra Científica
Maquetación Web
Indización y Repositorio
Publicación de Obra Científica
Certificado de Obra Científica
Facturación por Servicio de Edición

Política Editorial y Administración

Parque Pedregal Empresarial 3580 - Boulevard Adolfo Ruiz Cortines, CP-01900. San Jerónimo Aculco Álvaro Obregón - Ciudad de México. Tel: +52 1 55 6159 2296, +52 1 55 1260 0355, +52 1 55 6034 9181; Correo electrónico: contact@ecorfan.org www.ecorfan.org

ECORFAN®

Editor en Jefe
VARGAS-DELGADO, Oscar. PhD

Directora Ejecutiva
RAMOS-ESCAMILLA, María. PhD

Director Editorial
PERALTA-CASTRO, Enrique. MsC

Diseñador Web
ESCAMILLA-BOUCHAN, Imelda. PhD

Diagramador Web
LUNA-SOTO, Vladimir. PhD

Asistentes Editoriales
SORIANO-VELASCO, Jesús. BsC

Filóloga
RAMOS-ARANCIBIA, Alejandra. BsC

Publicidad y Patrocinio

(ECORFAN®- Mexico- Bolivia- Spain- Ecuador- Cameroon- Colombia- El Salvador- Guatemala- Nicaragua- Peru- Paraguay- Democratic Republic of The Congo- Taiwan), sponsorships@ecorfan.org

Licencias del Sitio

03-2010-032610094200-01-Para material impreso, 03-2010-031613323600-01-Para material electrónico, 03-2010-032610105200-01-Para material fotográfico, 03-2010-032610115700-14-Para Compilación de Datos, 04 -2010-031613323600-01-Para su página Web, 19502-Para la Indización Iberoamericana y del Caribe, 20-281 HB9-Para la Indización en América Latina en Ciencias Sociales y Humanidades, 671-Para la Indización en Revistas Científicas Electrónicas España y América Latina, 7045008-Para su divulgación y edición en el Ministerio de Educación y Cultura-España, 25409-Para su repositorio en la Biblioteca Universitaria-Madrid, 16258-Para su indexación en Dialnet, 20589-Para Indización en el Directorio en los países de Iberoamérica y el Caribe, 15048-Para el registro internacional de Congresos y Coloquios. financingprograms@ecorfan.org

Oficinas de Gestión

Parque Pedregal Empresarial 3580 - Boulevard Adolfo Ruiz Cortines, CP-01900. San Jerónimo Aculco Álvaro Obregón - Ciudad de México
21 Santa Lucía, CP-5220. Libertadores -Sucre – Bolivia.
38 Matacerquillas, CP-28411. Moralzarzal –Madrid-España.
18 Marcial Romero, CP-241550. Avenida, Salinas l - Santa Elena-Ecuador.
1047 Avenida La Raza -Santa Ana, Cusco-Perú.
Boulevard de la Liberté, Immeuble Kassap, CP-5963.Akwa- Douala-Camerún.
Avenida Suroeste, San Sebastian - León-Nicaragua.
31Kinshasa 6593- Republique Démocratique du Congo.
Avenida San Quentin, R 1-17 Miralvalle - San Salvador-El Salvador.
16 kilómetros, carretera estadounidense, casa Terra Alta, D7 Mixco Zona 1-Guatemala.
105 Alberdi Rivarola Capitán, CP-2060. Luque City- Paraguay.
69 Calle Distrito YongHe, Zhongxin. Taipei-Taiwán.
43 Calle # 30 -90 B. El Triunfo CP.50001. Bogotá-Colombia.

9 786078 948031
ISBN 978-607-8948-03-1
www.ecorfan.org